МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДОНБАСЬКА ДЕРЖАВНА МАШИНОБУДІВНА АКАДЕМІЯ
Кафедра математики та моделювання

Затверджую:
Декан факультету машинобудування
__________/Кассов В. Д./
«_30_» __08_______ 2021 р

Гарант освітньої програми:
канд. фіз.-мат. наук, доц.
_____________ /Ровенська О. Г./
«_14_» _05.05_____ 2021 р

Розглянуто і схвалено на засіданні кафедри математики та моделювання
Протокол № 14 від 05.05.2021р
Завідувач кафедри
______________/Астахов В. М./

РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ
«МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ»

галузь знань 01 Освіта/Педагогіка
спеціальність 014 Середня освіта (Математика)
ОПП «Математика»
освітній рівень бакалавр

Факультет Машинобудування
Розробники:
К.ф.-м..н. Ровенська О.Г.

Розроблено за підтримки громадської організації «Smart Maths»
http://formathematics.com/

Краматорськ –2021 р.

Робоча програма навчальної дисципліни «Математичний аналіз» для підготовки фахівців за бакалаврським рівнем вищої освіти, спеціальність 014 Середня освіта (Математика), освітня програма «Математика».

©Ровенська О.Г., ДДМА 2021 р.
© ДДМА 2021 р.

1. РОЗПОДІЛ ГОДИН

навчанняФорма	Кредитів ECTS	Годин	Аудиторних годин				Самост. робота	Розподіл за семестрами			
			Лекції	Практичні	Лабораторні	Всього		Екзамени	Заліки	ДЗ	Курсова робота
2 сем	**5**	**150**	**27**	**27**	–	**54**	**96**	+			
3 сем	**8**	**240**	**60**	**45**	–	**105**	**135**			+	
4 сем	**9**	**270**	**54**	**54**		**108**	**162**	+			
4 сем	**1,5**	**45**	**0**	**0**	–	**0**	**45**				+
Всього	**23,5**	**705**	**141**	**126**	–	**267**	**438**				

2. МЕТА ТА ЗАВДАННЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Мета вивчення дисципліни – формування когнітивних, афективних та психомоторних компетентностей в сфері навчання студентів математичним методам, що є необхідними у дослідженні математичних моделей, які формуються під час використання методів і засобів математичного аналізу для вирішення складених проблем і ситуацій реального світу, а також набуття навичок застосування цих компетентностей у професійній діяльності. Курс вводить студентів у світ сучасної математики, знайомлячи їх з основами теорії диференціального та інтегрального числення, теорією рядів та спеціальних функцій, які дістануть подальшого розвитку і продовження в функціональному аналізі, теорії диференціальних рівнянь та інших загальних та спеціальних курсах. Важливою задачею курсу є узагальнення шкільного курсу початків аналізу, а також подальше ознайомлення з основними поняттями математичного аналізу: границя, похідна, первісна, визначений інтеграл. У подальшому ці поняття знаходять численні застосування в математичних теоріях та прикладних науках: економіці, теорії управління, кібернетиці, фінансовій математиці, екологічному та соціальному моделюванні і т.п.

У результаті вивчення навчальної дисципліни студент має опанувати ***загальними компетентностями***:

– Здатність учитися, здобувати нові знання, уміння, у тому числі в галузі, відмінній від професійної ;

– Здатність застосовувати професійні знання й уміння на практиці;

– Здатність гнучко адаптуватися до різних професійних ситуацій, проявляти творчий підхід, ініціативу;

– Здатність критично оцінювати й переосмислювати накопичений досвід (власний і чужий), аналізувати свою професійну й соціальну діяльність;

– Здатність вирішувати проблеми в професійній діяльності на основі аналізу й синтезу;

– Здатність працювати з інформацією: знаходити, оцінювати й використовувати інформацію з різних джерел, потрібну для розв’язання професійних завдань;

– Здатність використовувати в професійній діяльності базові знання в галузі точних, соціально-гуманітарних, та економічних наук;

– Здатність ефективно використовувати комп’ютерні та інформаційні технології в професійній діяльності;

фаховими компетентностями:

– Здатність аналізувати елементарну математику з точки зору вищої математики;

– Здатність застосовувати основні поняття, ідеї, методи фундаментальних математичних дисциплін до розв’язання стандартних та евристичних (нестандартних) задач;

– Здатність застосовувати математичні методи до створення і аналізу математичних моделей реальних об’єктів, процесів і явищ;

– Здатність застосовувати сучасні програми і пакети комп’ютерної математики.

Завдання вивчення дисципліни (**математичні вміння та навички**).

Прослухавши курс «Математичний аналіз», ***студент повинен знати***:

- методи дослідження функцій засобами диференціального числення;
- властивості елементарних функцій;
- геометричне тлумачення основних понять диференціального та інтегрального числення, теорії границь;
- основні методи інтегрування;
- формули, що виражають застосування понять математичного аналізу в економіці, геометрії, фізиці;
- основи теорії невласних інтегралів I і II роду;
- основні поняття і формули теорії поля;
- прийоми інтегрування функцій багатьох змінних;
- основні теореми теорії рядів;
- методи застосування теорії рядів в теорії наближення, теорії диференціальних рівнянь;
- основні види спеціальних функцій.

Прослухавши курс***, студент повинен вміти***:

- виконувати диференціювання елементарних функцій, заданих різними способами;
- обчислювати границі послідовностей, функцій дійсної змінної;
- виконувати інтегрування за таблицею, з використанням методів інтегрування частинами і заміни змінної;
- виконувати диференціювання функцій двох змінних;
- застосовувати властивості визначеного інтегралу до задач геометрії, економіки, фізики;
- знаходити основні характеристики векторних і скалярних полів;
- досліджувати на збіжність числові ряди;
- застосовувати основні ознаки збіжності числових рядів;
- знаходити область збіжності функціонального ряду;
- застосовувати числові і функціональні ряди в теорії наближення.

Програмні результати навчання

- Демонструвати знання й розуміння основних концепцій, принципів, теорій фундаментальної математики і використовувати їх на практиці під час розв’язання завдань з економіки і розробки бізнес проектів;
- Володіти основними поняттями та теоретичними основами класичних розділів математичної науки, базовими ідеями та методами математики, системою основних математичних структур і аксіоматичним методом, аналізує елементарну математику з точки зору вищої математики;
- Демонструвати культуру математичного мислення, логічну та алгоритмічну культуру;
- Знати методику подання конкретних тем курсу економіки в основній та старшій школі;
- Уміти розв’язувати задачі різних рівнів складності шкільного курсу математики;
- Знати методи розробки та дослідження алгоритмів розв’язування задач з економіки та використання ІКТ під час розв’язання завдань з практичним змістом;
- Володіти методикою підготовки учнів до предметних олімпіад та конкурсів;
- Розрізняти, критично осмислювати й використовувати традиційні та спеціальні підходи до навчання школярів, сучасні методи навчання і форми організації навчально-пізнавальної діяльності учнів;
- Демонструвати готовність до проведення психолого-педагогічних спостережень і використання різних методів дослідження учнівського колективу та на їх основі впливати (корегувати) на міжособистісні стосунки учнів, індивідуальний розвиток особистості;

- Виявляти здатність до самонавчання та продовження професійного розвитку;
- Уміти організувати власну діяльність та одержувати результат у рамках обмеженого часу;
- Уміти відповідально управляти процесом формування готовності учнів до самостійного прийняття рішень, подолання труднощів, прояву поваги до інтелектуальної праці та її результатів.

Попередніми умовами успішного вивчення курсу «Математичний аналіз» є володіння основними математичними поняттями, фактами та теоріями елементарної математики, володіння логічними основами елементарної математики.

Частина розділів курсу є природним розвитком та узагальненням курсу початків аналізу. До них належать, наприклад, дослідження елементарних функцій, теорія границь, диференціальне числення. Разом з тим, більшість розділів у курсі є новими для студентів та незвичайними з точки зору елементарної математики. Це, зокрема, диференціальне та інтегральне числення функцій багатьох змінних, теорія поля, теорія рядів, теорія спеціальних функцій. Для кращого засвоювання цього матеріалу у лекційній частині курсу має постійно простежуватися взаємозв'язок між аналітичним та геометричним тлумаченням понять.

Підвищенню ефективності вивчення курсу сприяє використання всесвітньої мережі Інтернет, різноманітних програмних засобів навчального призначення, бібліотек електронних наочностей, офісних і спеціалізованих пакетів (наЗавдання, MsOffice, Ms PowerPoint, MathCAD, MAPLE та інших). За їх допомогою більш наочним стає вивчення низки тем курсу математичного аналізу. Проте слід знайти виважену границю щодо оптимального обсягу застосування цих засобів. Слід усвідомлювати, що зазначені інформаційні технології слугують лише допоміжним елементом пошуку інформації, її наочного подання або урізноманітнення навчальних завдань. Не слід надто захоплюватись уміннями вільно оперувати зазначеними програмно-технічними засобами на шкоду основним завданням вивчення курсу.

3. РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

3.1 Тематика лекцій та практичних занять

2 семестр, 18 тижнів

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1. ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Тема 1.1. Елементи теорії множин

Поняття множини
Дії над множинами
Еквівалентні множини
Відображення множин. Функція
Декартів добуток
Множина дійсних чисел. Числова пряма
Елементарні властивості дійсних чисел
Точні грані множини дійсних чисел
Дії над числами. Нерівності для модуля суми.
Нерівність Коші
Лема про вкладені відрізки

Література: [1] Гл. 1 § 1-4; [3] Розд. 1 § 1.2-1.8; [4] Гл. 1 § 1, 1.1-1.4

Тема 1.2. Границя послідовності

Визначення і способи завдання
Властивості збіжних послідовностей
Монотонні послідовності
Підпослідовності і їх властивості
Фундаментальні послідовності. Критерій Коші

Література: [1] Гл. 2 § 1-5; [3] Розд. 2 § 2.6-2.13; [4] Гл. 1 § 3, 3.1-3.8

Тема 1.3. Функція

Означення функції. Завданняи. Способи задання функції
Складені функції
Основні елементарних функцій: лінійна, степенева, тригонометричні, оберненотригонометричні, показникова, логарифмічна. Властивості, графіки

Література: [3] Розд. 2 § 2.1-2.5; [4] Гл. 1 § 4, 4.1-4.3

Тема 1.4. Границя функції

Границя функції в точці. Визначення Коші, визначення Гейне, еквівалентність
Властивості границі функції в точці
Однобічні границі. Існування границі функції в точці
Дослідження локальної поведінки функції. Нескінченно малі та нескінченно великі величини
Відношення еквівалентності
Неперервні функції
Чудові границі
Рівномірна неперервність
Розриви функції
Теорема Вейерштрасса

Література: [1] Гл. 3 § 1-4; [3] Розд. 2 § 2.15-2.23; [4] Гл. 1 § 4, 4.4-4.11

3 семестр, 15 тижнів

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 2. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Тема 2.1 Похідна

Визначення, способи завдання, інтерпретація похідної.
Правила обчислення похідних
Теореми про диференційовні функції. Диференціал
Похідні вищих порядків. Диференціали вищих порядків

Література: [1] Гл. 4 § 1-3; [3] Розд. 3 § 3.1-3.8; [4] Гл. 1, § 4, 10

Тема 2.2. Застосування похідної

Правило Лопіталя.
Формула Тейлора
Екстремуми. Точки перегину. Дослідження функцій
Побудова графіків. Асимптоти.
Застосування похідної в задачах економіки, алгебри, фізики.

Література: [1] Гл. 4 § 4; [3] Розд. 3 § 3.9-3.17; [4] Гл. 1, § 12-14

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 3. ПЕРВІСНА І НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

Тема 3.1. Визначення і властивості

Поняття первісної і невизначеного інтегралу.
Властивості невизначеного інтегралу
Таблиця інтегралів
Інтегрування заміною змінних
Інтегрування частинами

Література: [1] Гл. 5 § 1; [3] Розд. 4 § 4.1-4.4; [4] Гл. 3, § 22

Тема 3.2. Інтегрування деяких класів функцій

Інтегрування раціональних виразів
Інтегрування тригонометричних функцій
Інтегрування ірраціональностей

Література: [1] Гл. 5 § 2; [3] Розд. 4 § 4.5-4.9; [4] Гл. 3, § 24-26

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 4. ІНТЕГРАЛ РІМАНА

Тема 4.1. Визначення інтегралу Рімана

Вступ. Визначення інтегралу Рімана
Критерій інтегровності
Класи інтегровних функцій. Теорема Дарбу
Властивості інтегралу Рімана

Література: [1] Гл. 6 § 1, 2; [3] Розд. 5 § 5.1-5.4; [4] Гл. 3, § 27, 28

Тема 4.2. Формула Ньютона-Лейбниця

Формула Ньютона-Лейбниця
Заміна змінної
Формула Тейлора з остаточним членом в інтегральній формі
Граничний перехід під знаком інтегралу

Література: [1] Гл. 6 § 4; [3] Розд. 5 § 5.5, 5.6; [4] Гл. 3, § 30

Тема 4.3. Застосування інтегралу Рімана

Геометричні застосування: площа криволінійної трапеції, довжина дуги, об'єм тіла обертання, площа поверхні обертання

Наближені обчислення визначеного інтегралу

Застосування визначеного інтегралу в задачах економіки і техніки

Література: [1] Гл. 6 § 5; [3] Розд. 5 § 5.8-5.14; [4] Гл. 3, § 32

4 семестр, 18 тижнів

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 5. ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Тема 5.1. Функція багатьох змінних

Визначення. Інтерпретація.

Поняття границі. Неперервність

Література: [2] Гл. 10 § 1-4; [4] Гл. 2, § 18, 19; [7] Гл. 7, § 7.1-7.3

Тема 5.2. Похідна функції багатьох змінних

Частинні похідні і диференціали

Похідна за напрямом

Диференційовні функції. Основні властивості

Екстремуми

Література: [2] Гл. 10 § 5-7; [4] Гл. 2, § 20; [7] Гл. 7, § 7.4-7.15

Тема 5.3. Похідні вищих порядків

Похідні і диференціали вищих порядків

Формула Тейлора

Достатня ознака існування екстремуму

Опуклість

Література: [4] Гл. 2, § 21; [5] Гл. 5, § 39-41; [7] Гл. 7, § 7.8

Тема 5.4. Кратні інтеграли.

Вступ. Подвійні інтеграли. Визначення. Властивості. Обчислення

Застосування подвійних інтегралів

Потрійний інтеграл. Визначення. Властивості. Обчислення і застосування

Література: [5] Гл. 6, § 44-46

Тема 5.5. Криволінійні, поверхневі інтеграли і теорія поля *(40 годин)*

Криволінійний інтеграл I роду. Визначення, властивості

Криволінійний інтеграл II роду. Визначення, властивості, обчислення. Формула Гріна. Принципи застосування криволінійних інтегралів.

Інтеграли за поверхнею. Формула для обчислення. Формула Стокса. Формула Остроградського-Гауса. Застосування в теорії поля

Література: [5] Гл. 6, § 47

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 6. РЯДИ. НЕВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ І СПЕЦІАЛЬНІ ФУНКЦІЇ

Тема 6.1. Числові ряди

Основні поняття. Знакододатні числові ряди

Критерії збіжності

Числові ряди з довільними членами. Абсолютна та умовна збіжність

Перестановка членів ряду. Добуток рядів. Нескінченні добутки

Література: [1] Гл. 7, § 1-4; [4] Гл. 4, § 35; [7] Гл. 11, § 1.1-1.6

Тема 6.2. Функціональні ряди

Рівномірна збіжність.

Властивості рівномірно збіжних рядів

Степеневі ряди. Область збіжності.
Ряд Тейлора
Степеневі ряди з комплексними членами

Література: [1] Гл. 8, § 1-5; [4] Гл. 4, § 36, 37; [7] Гл. 11, § 1.7, 1.8

Тема 6.3. Елементи теорії рядів Фур'є

Ряди Фур'є за ортогональною системою.
Тригонометричні ряди Фур'є. Збіжність у точці. Теорема Фейєра
Випадок з довільним періодом.

Література: [5] Гл. 7, § 55; [6] Гл. 7 § 55, 60; [7] Гл. 11, § 1.10

Тема 6.4. Невласні інтеграли і спеціальні функції

Поняття невласного інтегралу I і II роду. Завданняи
Функції, що визначаються інтегралами. Деякі спеціальні функції

Література: [3] Гл. 4, § 33; [6] Гл. 7 § 61

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 7. КУРСОВИЙ ПРОЕКТ З МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Тема 7.1 Математичні моделі в оптимізаційних задачах економіки.

Дослідження математичних моделей засобами комп'ютерної математики. Еластичність. Оптимізація економічних показників.

Література: [1] Гл. 4 § 4; [3] Розд. 3 § 3.9-3.17; [4] Гл. 1, § 12-14

Тема 7.2 Екстремальні задачі теорії наближення функцій дійсної змінної

Класифікація і розв'язання задач пошуку екстремальних характеристик наближення функцій дійсної змінної засобами комп'ютерної математики

Література: [1] Гл. 8, § 1-5; [4] Гл. 4, § 36, 37; [7] Гл. 11, § 1.7, 1.8

Тема 7.3 Дослідження наближення функцій поліномами (апроксімації Паде)

Вивчення питань наближення функцій однієї дійсної змінної раціональними функціями засобами комп'ютерної математики.

Література: [1] Гл. 8, § 1-5; [4] Гл. 4, § 36, 37; [7] Гл. 11, § 1.7, 1.8

Тема 7.4 Наближені методи інтегрування елементарних функцій.

Вивчення і порівняння методів наближеного обчислення визначених і невласних інтегралів у прикладних математичних пакетах.

Література: [1] Гл. 8, § 1-5; [4] Гл. 4, § 36, 37; [7] Гл. 11, § 1.7, 1.8

Тема 7.5 Ряди Фур'є по ортогональним системам з довільним періодом

Розв'язання задач керування засобами засобами комп'ютерної моделювання.

Література: [5] Гл. 7, § 55; [6] Гл. 7 § 55, 60; [7] Гл. 11, § 1.10.

3.2 Результати навчання і їх розподіл за модулями

Формулювання спеціальних результатів із їх розподілом за модулями представлені нижче:

Модулі	Зміст програмного результату навчання
ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ	Здобувач вищої освіти здатний – учитися, здобувати нові знання, уміння; – ефективно будувати комунікацію, виходячи з цілей і ситуації спілкування; – гнучко адаптуватися до різних ситуацій на основі аналізу й синтезу, проявляти творчий підхід, ініціативу;

Модулі	Зміст програмного результату навчання
	– знаходити, оцінювати й використовувати інформацію з різних джерел, необхідну для розв'язання завдань, у тому числі професійних; – застосовувати методи початків аналізу до розв'язання стандартних та евристичних (нестандартних) задач; – аналізувати елементарну математику з точки зору теорії множин; – застосовувати сучасні математико-статистичні методи та пакети комп'ютерної математики до створення і аналізу математичних моделей дослідження функції дійсної змінної
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ	Здобувач вищої освіти здатний – учитися, здобувати нові знання, уміння; – ефективно будувати комунікацію, виходячи з цілей і ситуації спілкування; – гнучко адаптуватися до різних ситуацій на основі аналізу й синтезу, проявляти творчий підхід, ініціативу; – знаходити, оцінювати й використовувати інформацію з різних джерел, необхідну для розв'язання завдань, у тому числі професійних; – застосовувати операції диференціювання до розв'язання стандартних та евристичних (нестандартних) задач; – застосовувати сучасні математико-статистичні методи та пакети комп'ютерної математики до створення і аналізу математичних моделей на основі методів диференціального числення функції дійсної змінної
ПЕРВІСНА І НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ	Здобувач вищої освіти здатний – учитися, здобувати нові знання, уміння; – ефективно будувати комунікацію, виходячи з цілей і ситуації спілкування; – гнучко адаптуватися до різних ситуацій на основі аналізу й синтезу, проявляти творчий підхід, ініціативу; – знаходити, оцінювати й використовувати інформацію з різнихджерел, необхідну для розв'язання завдань, у тому числі професійних; – застосовувати методи інтегрування до розв'язання стандартних та евристичних (нестандартних) задач; – застосовувати сучасні математико-статистичні методи та пакетикомп'ютерної математики для інтегрування визначених класів функцій
ІНТЕГРАЛ РІМАНА	Здобувач вищої освіти здатний – учитися, здобувати нові знання, уміння; – ефективно будувати комунікацію, виходячи з цілей і ситуації спілкування; – гнучко адаптуватися до різних ситуацій на основі аналізу й синтезу, проявляти творчий підхід, ініціативу; – знаходити, оцінювати й використовувати інформацію з різних джерел, необхідну для розв'язання завдань, у тому числі професійних; – застосовувати визначений інтеграл до розв'язання стандартних та евристичних (нестандартних) задач; – аналізувати відповідні поняття елементарної математики з точки зору теорії визначеного інтеграла

ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ	Здобувач вищої освіти здатний – учитися, здобувати нові знання, уміння; – ефективно будувати комунікацію, виходячи з цілей і ситуації спілкування; – гнучко адаптуватися до різних ситуацій на основі аналізу й синтезу, проявляти творчий підхід, ініціативу; – знаходити, оцінювати й використовувати інформацію з різних джерел, необхідну для розв'язання завдань; – застосовувати поняття теорії диференціального та інтегрального числення функції двох та декількох змінних до розв'язання стандартних та евристичних (нестандартних) задач
РЯДИ. НЕВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ І СПЕЦІАЛЬНІ ФУНКЦІЇ	Здобувач вищої освіти здатний – учитися, здобувати нові знання, уміння; – ефективно будувати комунікацію, виходячи з цілей і ситуації спілкування; – гнучко адаптуватися до різних ситуацій на основі аналізу й синтезу, проявляти творчий підхід, ініціативу; – знаходити, оцінювати й використовувати інформацію з різних джерел, необхідну для розв'язання завдань; – застосовувати теорію числових і функціональних рядів до розв'язання стандартних та евристичних (нестандартних) задач
КУРСОВИЙ ПРОЕКТ З МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ	Здобувач вищої освіти здатний – учитися, здобувати нові знання, уміння; – ефективно будувати комунікацію, виходячи з цілей і ситуації спілкування; – гнучко адаптуватися до різних ситуацій на основі аналізу й синтезу, проявляти творчий підхід, ініціативу; – знаходити, оцінювати й використовувати інформацію з різних джерел, необхідну для розв'язання завдань; – застосовувати загальні методи математичного аналізу до розв'язання стандартних та евристичних (нестандартних) задач

4. СТРУКТУРА ТА ТЕХНОЛОГІЧНА КАРТА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

4.1 Технологічна карта навчальної дисципліни

на 2 семестр Види занять		Всього	Навчальні тижні																	
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Аудиторн	Лекції	**27**	2		2		2		2		1	2	2	2	2	2	2	2	2	2
	Практичні	**27**		2		2		2		2	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2
	Лабораторні																			
	Індивідуальні																			
	Поточ. контр.				+									+						
	Контр.роб.(ТО)								+										+	
	Модул. контр																			M1
	Захист курсов																			
	Захист лабор.																			
	Консультації																			
	Атестації										A1									A2
	Всього	**54**	2	2	2	2	2	2	2	2	2	4	4	4	4	4	4	4	4	4
Самостійні	Курс. проект.																			
	Підгот. до зан	**96**	6	6	6	6	6	6	6	6	7	5	4	5	4	5	4	5	4	5
	Розрах.-граф.																			
	Консультації																			
	Екскурсії																			
	Всього	**96**	6	6	6	6	6	6	6	6	7	5	4	5	4	5	4	5	4	5
Навчальне навантаження студентів		**150**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**9**	**9**	**8**	**9**	**8**	**9**	**8**	**9**	**8**	**9**

Підсумковий контроль – іспит

на 3 семестр Види занять		Всього	Навчальні тижні																
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Аудиторні	Лекції	**60**	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4		
	Практичні	**45**	2	4	2	4	2	4	2	4	2	4	2	4	2	4	3		
	Лабораторні																		
	Індивідуальні																		
	Поточ. контр.				+								+						
	Контр.роб. (ТО)								+							+			
	Модул. контр						M2					M3					M4		
	Захист курсов																		

	Захист лабор.																		
	Консультації																		
	Атестації									A1							A2		
	Всього	**105**	6	8	6	8	6	8	6	8	6	8	6	8	6	8	7		
Самостійні	Курс. проект.																		
	Підгот. до зан	**135**	10	8	10	8	10	8	10	8	10	8	10	8	10	8	9		
	Розрах.-граф.																		
	Консультації																		
	Екскурсії																		
	Всього	**135**	10	8	10	8	10	8	10	8	10	8	10	8	10	8	9		
Навчальне навантаження студентів		**240**	**16**	**16**	**16**	**16**	**16**	**16**	**16**	**16**	**16**	**16**	**16**	**16**	**16**	**16**	**16**		

Підсумковий контроль – диф. залік

на 4 семестр Види занять		Всього	Навчальні тижні																	
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Аудиторн	Лекції	**54**	4	4	4	4	4	4	4	4	4	2	2	2	2	2	2	2	2	2
	Практичні	**54**	4	4	4	4	4	4	4	4	4	2	2	2	2	2	2	2	2	2
	Лабораторні																			
	Індивідуальні																			
	Поточ. контр.				+								+							
	Контр.роб. (ТО)								+							+				
	Модул. контр										M5									M6
	Захист курсов																			+
	Захист лабор.																			
	Консультації																			
	Атестації										A1									A2
	Всього	**108**	8	8	8	8	8	8	8	8	8	4	4	4	4	4	4	4	4	4
Самостійні	Курс. проект.	**45**										5	5	5	5	5	5	5	5	5
	Підгот. до зан	**162**	7	7	7	7	7	7	7	7	7	11	11	11	11	11	11	11	11	11
	Розрах.-граф.																			
	Консультації																			
	Екскурсії																			
	Всього	**207**	7	7	7	7	7	7	7	7	7	16	16	16	16	16	16	16	16	16
Навчальне навантаження студентів		**315**	**15**	**15**	**15**	**15**	**15**	**15**	**15**	**15**	**15**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**

Підсумковий контроль – іспит, диф. залік

4.2 Розподіл часу за темами і модулями

№	Назва змістових модулів і тем	Кількість годин			
		Усього	В тому числі		
			Л	П(С)	СРС
ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1. ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ					
1	**Тема 1.1. Елементи теорії множин** Поняття множини Дії над множинами Еквівалентні множини Відображення множин. Функція Декартів добуток Множина дійсних чисел. Числова пряма Елементарні властивості дійсних чисел Точні грані множини дійсних чисел Дії над числами. Нерівності для модуля суми. Нерівність Коші Лема про вкладені відрізки	25	5	5	15
2	**Тема 1.2. Границя послідовності** Визначення і способи завдання Властивості збіжних послідовностей Монотонні послідовності Підпослідовності і їх властивості Фундаментальні послідовності. Критерій Коші	30	6	6	18
3	**Тема 1.3. Функція** Означення функції. Способи задання функції Складені функції Основні елементарних функцій: лінійна, степенева, тригонометричні, оберненотригонометричні, показникова, логарифмічна. Властивості, графіки	45	8	8	29
4	**Тема 1.4. Границя функції** Границя функції в точці. Визначення Коші, визначення Гейне, еквівалентність Властивості границі функції в точці Однобічні границі. Існування границі функції в точці Дослідження локальної поведінки функції. Нескінченно малі та нескінченно великі величини Відношення еквівалентності Неперервні функції Чудові границі Рівномірна неперервність Розриви функції Теорема Вейерштрасса	50	8	8	34
5	**Разом М1**	**150**	**27**	**27**	**96**
6	**Разом за 2 семестр**	**150**	**27**	**27**	**96**

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 2. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ					
7	**Тема 2.1 Похідна** Визначення, інтерпретація похідної. Правила обчислення похідних Теореми про диференційовні функції. Диференціал Похідні вищих порядків. Диференціали вищих порядків	46	11	8	27
8	**Тема 2.2. Застосування похідної** Правило Лопіталя. Формула Тейлора Екстремуми. Точки перегину. Дослідження функцій Побудова графіків. Асимптоти. Застосування похідної в задачах економіки, алгебри, фізики.	54	14	10	30
9	**Разом М2**	**100**	**25**	**18**	**57**
ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 3. ПЕРВІСНА І НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ					
10	**Тема 3.1. Визначення і властивості** Поняття первісної і невизначеного інтегралу. Властивості невизначеного інтегралу Таблиця інтегралів Інтегрування заміною змінних Інтегрування частинами	36	9	7	20
11	**Тема 3.2. Інтегрування деяких класів функцій** Інтегрування раціональних виразів Інтегрування тригонометричних функцій Інтегрування ірраціональностей	24	6	4	14
12	**Разом М3**	**60**	**15**	**11**	**34**
ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 4. ІНТЕГРАЛ РІМАНА					
13	**Тема 4.1. Визначення інтегралу Рімана** Вступ. Визначення інтегралу Рімана Критерій інтегровності Класи інтегровних функцій. Теорема Дарбу Властивості інтегралу Рімана	30	7	6	17
14	**Тема 4.2. Формула Ньютона-Лейбниця** Формула Ньютона-Лейбниця Заміна змінної Формула Тейлора з остаточним членом в інтегральній формі Граничний перехід під знаком інтегралу	20	5	4	11
15	**Тема 4.3. Застосування інтегралу Рімана** Геометричні застосування: площа криволінійної трапеції, довжина дуги, об'єм тіла обертання, площа поверхні обертання Наближені обчислення визначеного інтегралу Застосування визначеного інтегралу в задачах економіки і техніки	30	8	5	17

16	**Разом М4**	**80**	**20**	**15**	**45**
17	**Разом за 3 семестр**	**240**	**60**	**45**	**135**
ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 5. ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ					
18	**Тема 5.1. Функція багатьох змінних** Визначення. Інтерпретація. Поняття границі. Неперервність	15	3	3	9
19	**Тема 5.2. Похідна функції багатьох змінних** Частинні похідні і диференціали Похідна за напрямом Диференційовні функції. Основні властивості Екстремуми	35	7	7	21
20	**Тема 5.3. Похідні вищих порядків** Похідні і диференціали вищих порядків Формула Тейлора Достатня ознака існування екстремуму Опуклість	20	4	4	12
21	**Тема 5.4. Кратні інтеграли.** Вступ. Подвійні інтеграли. Визначення. Властивості. Обчислення Застосування подвійних інтегралів Потрійний інтеграл. Визначення. Властивості. Обчислення і застосування	50	10	10	30
22	**Тема 5.5. Криволінійні, поверхневі інтеграли і теорія поля** Криволінійний інтеграл I роду. Визначення, властивості Криволінійний інтеграл II роду. Визначення, властивості, обчислення. Формула Гріна. Принципи застосування криволінійних інтегралів. Інтеграли за поверхнею. Формула для обчислення. Формула Стокса. Формула Остроградського-Гауса. Застосування в теорії поля	40	8	8	24
23	**Разом М5**	**160**	**32**	**32**	**96**
ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 6. РЯДИ. НЕВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ І СПЕЦІАЛЬНІ ФУНКЦІЇ					
24	**Тема 6.1. Числові ряди** Основні поняття. Знакододатні числові ряди Критерії збіжності Числові ряди з довільними членами. Абсолютна та умовна збіжність Перестановка членів ряду. Добуток рядів. Нескінченні добутки	50	10	10	30
25	**Тема 6.2. Функціональні ряди** Рівномірна збіжність. Властивості рівномірно збіжних рядів Степеневі ряди. Область збіжності. Ряд Тейлора Степеневі ряди з комплексними членами	30	6	6	18
26	**Тема 6.3. Елементи теорії рядів Фур'є**	20	4	4	12

	Ряди Фур'є за ортогональною системою. Тригонометричні ряди Фур'є. Збіжність у точці. Теорема Фейєра Випадок з довільним періодом.				
27	**Тема 6.4. Невласні інтеграли і спеціальні функції** Поняття невласного інтегралу I і II роду. Завданняи Функції, що визначаються інтегралами. Деякі спеціальні функції	10	2	2	6
28	**Разом М6**	**110**	**22**	**22**	**66**
ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 7. КУРСОВИЙ ПРОЕКТ З МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ					
29	Тема 7.1 Математичні моделі в оптимізаційних задачах економіки. Тема 7.2 Екстремальні задачі теорії наближення функцій дійсної змінної Тема 7.3 Дослідження наближення функцій поліномами (аппроксімації Паде) Тема 7.4 Наближені методи інтегрування елементарних функцій. Тема 7.5 Ряди Фур'є по ортогональним системам з довільним періодом	45	0	0	45
30	**Разом М7**	**45**	**0**	**0**	**45**
31	**Разом за 4 семестр**	**315**	**54**	**54**	**207**
32	**Разом за курс**	**705**	**141**	**126**	**438**

Л – лекції, П (С) – практичні (семінарські) заняття, СРС – самостійна робота студентів.

5. САМОСТІЙНА РОБОТА

Уміння студентів самостійно працювати над вивченням конкретного предмета – важливий чинник підвищення якості підготовки спеціалістів.

Самостійна робота студента (денна форма навчання) включає підготовку до практичних занять; самостійне опрацювання додаткової літератури та питань для самоконтролю засвоєння змісту навчального матеріалу, а також підготовку рефератів, есе, доповідей та самостійних домашніх (творчих) завдань за тематикою, що наведено у методичних вказівках до самостійної роботи – Режим доступу : http://www.dgma.donetsk.ua/metodichne-zabezpechennya-osvitno-profesiyna-programa-serednya-osvita-matematika.html

Враховуючи це, рекомендуються наступні **форми організації самостійної роботи студентів з математичного аналізу**:

– підготовка до практичних занять;
– самостійне опрацювання додаткової літератури до тем лекційного курсу і практичних (семінарських) занять, а також літератури для підготовки самостійного домашнього завдання;
– підготовка доповідей, рефератів та есе за тематикою лекцій і семінарів;
– самостійне опрацювання питань для самоконтролю засвоєння змісту лекційного матеріалу з курсу.

5.1 Перелік тем для самостійного вивчення

№ з\п	Підготовка до практичних занять та виконання самостійного домашнього завдання за теми	Кількість годин
1	Елементи теорії множин	15
2	Границя послідовності	18
3	Функція	29
4	Границя функції	3
5	Похідна	20
6	Застосування похідної	14
7	Визначення інтегралу Рімана	17
8	Формула Ньютона-Лейбниця	11
9	Застосування інтегралу Рімана	17
10	Функція багатьох змінних	9
11	Похідна функції багатьох змінних	21
12	Похідні вищих порядків	12
13	Кратні інтеграли	30
14	Криволінійні, поверхневі інтеграли і теорія поля	24
15	Числові ряди	30
16	Функціональні ряди	18
17	Елементи теорії рядів Фур'є	12
18	Невласні інтеграли і спеціальні функції	6
19	курсовий проект з математичного аналізу	45
Разом за курс		**438**

5.2 Розрахунок часу для самостійної роботи студента за видами

№ з/п	Вид роботи	Кількість годин
1	Опрацювання програмного матеріалу, що викладається на лекціях	93/
2	Підготовка до практичних занять	85/
3	Виконання індивідуальних завдань (рефератів, творчих, розрахунково-графічних робіт, презентацій тощо)	85/
4	Підготовка до контрольних заходів (модульна контрольна робота)	84/
5	Підготовка самостійного домашнього завдання	91/
	Разом	**438/**

Самостійна робота виконується у відповідності до методичних вказівок до самостійної роботи студента.

6. ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

Метою індивідуального завдання є ґрунтовне усвідомлення суттєвих властивостей основних понять курсу, закріплення основних теорем та формування практичних вмінь студентів.

Виконання індивідуального завдання передбачає розв’язання студентами задач з методичних посібників за наступними темами:

1 Елементи теорії множин
2 Границя послідовності
3 Функція
4 Границя функції
5 Похідна

6	Застосування похідної
7	Визначення інтегралу Рімана
8	Формула Ньютона-Лейбниця
9	Застосування інтегралу Рімана
10	Функція багатьох змінних
11	Похідна функції багатьох змінних
12	Похідні вищих порядків
13	Кратні інтеграли
14	Криволінійні, поверхневі інтеграли і теорія поля
15	Числові ряди
16	Функціональні ряди
17	Елементи теорії рядів Фур'є
18	Невласні інтеграли і спеціальні функції

7. МЕТОДИ НАВЧАННЯ

Під час викладання курсу використовуються наступні методи навчання:

– розповідь – для оповідної, описової форми розкриття навчального матеріалу;

– пояснення – для розкриття сутності певного явища, закону, процесу;

– бесіда – для усвідомлення за допомогою діалогу нових явищ, понять;

– ілюстрація – для розкриття предметів і процесів через їх символічне зображення (малюнки, схеми, графіки);

– практична робота – для використання набутих знань у розв’язанні практичних завдань;

– аналітичний метод – уявного або практичного розкладу цілого на частини з метою вивчення їх суттєвих ознак;

– індуктивний метод – для вивчення явищ від одиничного до загального;

– дедуктивний метод – для вивчення навчального матеріалу від загального до окремого, одиничного;

– проблемний виклад матеріалу – для створення проблемної ситуації.

8. МЕТОДИ КОНТРОЛЮ І ПИТАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗАСВОЄННЯ МАТЕРІАЛУ

Для визначення рівня засвоєння студентами навчального матеріалу використовують такі форми та методи контролю і оцінювання знань:

– оцінювання роботи студента під час практичних занять у вигляді усного опитування або виконання розрахункових завдань;

– написання підсумкових модульних контрольних та тестових робіт;

– оцінювання виконаного самостійного домашнього завдання та його захисту;

– складання іспиту.

Оцінку знань студентів з дисципліни «Математичний аналіз» здійснюють відповідно до положення ДДМА про організацію навчального процесу. Ця система базується на здійсненні наскрізного поточного контролю на аудиторному занятті у відповідності до його форми (лекційної, практичної).

Підсумковою оцінкою поточного контролю є оцінка за модуль, тобто реалізується принцип модульного обліку знань студентів.

Навчальним планом з дисципліни «Математичний аналіз» передбачено складання іспиту в другому і четвертому семестрі, диф. заліку – у третьому. Для оцінювання знань використовують стобальну шкалу оцінювання ECTS.

Порядок здійснення поточного оцінювання знань студентів.

Поточне оцінювання знань студентів здійснюється під час проведення практичних занять і має на меті перевірку рівня підготовленості студента до виконання конкретної роботи. Об'єктами поточного контролю є:

- активність та результативність роботи студента протягом семестру над вивченням програмного матеріалу дисципліни, відвідування занять;
- виконання завдань на практичних заняттях;
- виконання завдань поточного контролю.

Робота студентів на лекціях та практичних заняттях оцінюється за 100-бальною системою. При оцінюванні виконання практичних завдань увага приділяється їх якості й самостійності.

Контроль виконання самостійного домашнього завдання передбачає виявлення опанування студентом матеріалу лекційного модуля та вміння застосувати його для вирішення практичної ситуації і проводиться у вигляді захисту самостійного домашнього завдання.

Проведення підсумкового контролю.

Іспит здійснюється в письмовій формі за контрольними питаннями, які сформовані у екзаменаційні білети, що дають можливість здійснити оцінювання знань студента з усієї дисципліни.

Екзаменаційні відповіді за білетами оцінюються за 100-бальною системою.

Порядок виставлення оцінки за семестр

Оцінка за семестр обчислюється як середнє арифметичне (вагові коефіцієнти однакові і дорівнюють 0,5) поточного оцінювання і підсумкового контролю.

ПИТАННЯ ДО ДИФЕРЕНЦІЙОВАНИХ ЗАЛІКІВ ТА ІСПИТУ

2 семестр

1. Поняття множини. Дії над множинами. Еквівалентні множини
2. Відображення множин. Функція. Декартів добуток
3. Множина дійсних чисел. Числова пряма
4. Елементарні властивості дійсних чисел. Точні грані множини дійсних чисел. Дії над числами. Нерівності для модуля суми.
5. Нерівність Коші. Лема про вкладені відрізки
6. Границя послідовності . Визначення. Властивості збіжних послідовностей
7. Монотонні послідовності. Підпослідовності і їх властивості
8. Фундаментальні послідовності. Критерій Коші
9. Функція. Означення функції. Способи задання функції
10. Складені функції

11. Основні елементарних функцій: лінійна, степенева.
12 Тригонометричні, оберненотригонометричні, показникова, логарифмічна функція.
13. Границя функції в точці. Визначення за Коші, визначення за Гейне, еквівалентність
14. Властивості границі функції в точці
15. Однобічні границі. Існування границі функції в точці
16. Дослідження локальної поведінки функції. Нескінченно малі та нескінченно великі величини. Відношення еквівалентності
17. Неперервні функції
18. Чудові границі
19. Рівномірна неперервність
20. Розриви функції
21. Теорема Вейерштрасса

3 семестр

1. Похідна. Визначення, інтерпретація похідної.
2. Правила обчислення похідних
3. Теореми про диференційовні функції. Диференціал
4. Похідні вищих порядків. Диференціали вищих порядків
5. Застосування похідної. Правило Лопіталя.
6. Формула Тейлора
7. Точки перегину. Дослідження функцій
8. Побудова графіків. Асимптоти.
9. Застосування похідної в задачах економіки, алгебри, фізики.
10. Визначення і властивості первісної.
11. Властивості невизначеного інтегралу
12. Таблиця інтегралів
13. Інтегрування заміною змінних. Інтегрування частинами
14. Інтегрування раціональних виразів
15. Інтегрування тригонометричних функцій
16. Інтегрування ірраціональностей
18. Визначення інтегралу Рімана
19. Критерій інтегровності
20. Класи інтегровних функцій. Теорема Дарбу
21. Властивості інтегралу Рімана
22. Формула Ньютона-Лейбниця
23. Заміна змінної
24. Формула Тейлора з остаточним членом в інтегральній формі
25. Граничний перехід під знаком інтегралу
26. Застосування інтегралу Рімана. Площа криволінійної трапеції, довжина дуги
27. Об'єм тіла обертання, площа поверхні обертання
28. Наближені обчислення визначеного інтегралу
29. Застосування визначеного інтегралу в задачах економіки і техніки

3 семестр

1. Функція багатьох змінних. Визначення. Інтерпретація.
2. Поняття границі. Неперервність
3. Похідна функції багатьох змінних. Частинні похідні і диференціали
4. Похідна за напрямом
5. Диференційовні функції. Основні властивості
6. Екстремуми
7. Похідні і диференціали вищих порядків

8. Формула Тейлора
9. Достатня ознака існування екстремуму. Опуклість
10. Кратні інтеграли. Подвійні інтеграли. Визначення. Властивості. Обчислення
11. Застосування подвійних інтегралів
12. Потрійний інтеграл. Визначення. Властивості. Обчислення і застосування
13. Криволінійний інтеграл I роду. Визначення, властивості
14. Криволінійний інтеграл II роду. Визначення, властивості, обчислення. Формула Гріна. Принципи застосування криволінійних інтегралів.
15. Інтеграли за поверхнею. Формула для обчислення.
16. Формула Стокса. Формула Остроградського-Гауса. Застосування в теорії поля
17. Числові ряди. Основні поняття. Знакододатні числові ряди
18. Критерії збіжності
19. Числові ряди з довільними членами. Абсолютна та умовна збіжність
20. Перестановка членів ряду. Добуток рядів. Нескінченні добутки
21. Функціональні ряди. Рівномірна збіжність.
22. Властивості рівномірно збіжних рядів
23. Степеневі ряди. Область збіжності.
24. Ряд Тейлора
25. Степеневі ряди з комплексними членами
26. Ряди Фур'є за ортогональною системою.
27. Тригонометричні ряди Фур'є. Збіжність у точці. Теорема Фейєра
28. Ряди Фур'є за довільним періодом.
29. Поняття невласного інтегралу I і II роду. Обчислення.
30. Функції, що визначаються інтегралами. Деякі спеціальні функції

9. РОЗПОДІЛ БАЛІВ, ЯКІ ОТРИМУЮТЬ СТУДЕНТИ

2 семестр

Вид контрольного заходу	Бали		За семестр	До 1-й атестації
	max	max		
Контрольна робота 1	10	25	25	25
Контрольна робота 2	15	30	30	30
Контрольна робота 3	30	50	50	–
Разом за семестр	55	100	100	–
Іспит	55	100	100	–
Разом, з урахуванням вагових кофіцієнтів	55	100	100	–

4 3 семестр

Вид контрольного заходу	Бали		За семестр	До 1-й атестації
	max	max		
Контрольна робота 1	10	25	25	25
Контрольна робота 2	15	30	30	–
Контрольна робота 3	30	50	50	–
Разом за семестр	55	100	100	–
Диф. залік	55	100	100	–
Разом, з урахуванням вагових кофіцієнтів	55	100	100	–

4 семестр

Вид контрольного заходу	Бали		За семестр	До 1-й атестації
	max	max		
Контрольна робота 1	10	25	25	25
Контрольна робота 2	15	30	30	30
Контрольна робота 3	30	50	50	–
Разом за семестр	55	100	100	–
Іспит	55	100	100	–
Разом, з урахуванням вагових кофіцієнтів	55	100	100	–

Зразки модульних контролів та зразки розв'язань знаходяться у додатках А і Б відповідно.

За участь у науковій роботі, участь в олімпіадах і конкурсах студенту можуть призначатися додаткові бали до загального рейтингу за рішенням адміністрації факультету.

Шкала оцінювання

<table>
<tr><td rowspan="2">Сума балів за всі види навчальної діяльності</td><td colspan="2">Оцінка за національною шкалою</td></tr>
<tr><td>для екзамену, курсового проекту (роботи), практики</td><td>для заліку</td></tr>
<tr><td>90 – 100</td><td>відмінно</td><td rowspan="5">зараховано</td></tr>
<tr><td>82-89</td><td rowspan="2">добре</td></tr>
<tr><td>74-81</td></tr>
<tr><td>64-73</td><td rowspan="2">задовільно</td></tr>
<tr><td>60-63</td></tr>
<tr><td>35-59</td><td>незадовільно з можливістю повторного складання</td><td>не зараховано з можливістю повторного складання</td></tr>
<tr><td>1-34</td><td>незадовільно з обов’язковим повторним вивченням дисципліни</td><td>не зараховано з обов’язковим повторним вивченням дисципліни</td></tr>
</table>

10. РЕКОМЕНДОВАНІ ІНФОРМАЦІЙНІ ДЖЕРЕЛА

Базові

1. Дороговцев А.Я. Математичний аналіз: Підручник у двох частинах. Частина 1. К.: Либідь. 1993. - 320 с.
2. Дороговцев А.Я. Математичний аналіз: Підручник у двох частинах. Частина 2. К.: Либідь. 1994. - 304 с.
3. Шкіль М.І. Математичний аналіз: Підручник у 2-х ч. - 3-тє видання, переробл. і доповн. К.: Вища школа, 2005. - 447 с.

Допоміжні

1. Пак В.В., Носенко Ю.Л. Вища математика. – К. : Либідь, 1996, 440 с.
2. Бугір М. К. Математика для економістів.- Тернопіль: Підручники і посібники, 1998.- 192 с.
3 Вища математика: основні означення, приклади і задачі: Навч. посібник: У двох книгах. Книга 1 / Г. Л. Кулініч, Л. О. Максименко, В. В. Плахотник, Г. Й. Призва.- 2-е вид., зі змінами.- К.: Либідь, 1994.- 312 с.
4 Вища математика: основні означення, приклади і задачі: Навч. посібник: У двох книгах. Книга 2 / І. П. Васильченко, В. Я. Данилов, Є. Ю. Таран, А. І. Лобанов- 2-е вид., зі змінами.- К.: Либідь, 1994.- 280 с.
5 Пак В. В., Носенко Ю. Л. Вища математика: Підручник.- К.: Либідь, 1996.- 440 с.
6 Власенко К.В. Вища математика для майбутніх інженерів. Навчальний посібник. Донецьк: Ноулідж, 2010, 429 с
7 Шкіль М. І. Вища математика: Підручник: У 3 кн.: Кн. І. Аналітична геометрія з елементами алгебри. Вступ до математичного аналізу /М. І. Шкіль, Т. В. Колесник, В. М. Котлова.- К.: Либідь, 1994.-280 с.
8 Шкіль М. І. Вища математика: Підручник: У 3 кн.: Кн. ІІ. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної. Ряди.-К.: Либідь, 1994.- 352 с.
9 Шкіль М. І. Вища математика: Підручник: У 3 кн.: Кн. ІІІ. Диференціальне та інтегральне числення функцій багатьох змінних. Диференціальні рівняння.-К.: Либідь, 1994.- 352 с

Методичне забезпечення

1. Ровенська О.Г. Математичний аналіз./ Конспект лекцій. Краматорськ, ДДМА, 2020.
2. Ровенська О.Г. Методичні вказівки до курсової роботи з математичного аналізу./ Краматорськ, ДДМА, 2020.
3. Методичні вказівки до організації індивідуальної самостійної роботи з теми "Кратні інтеграли і теорія поля".-Краматорськ, 2004 р.
4. Методичні вказівки до практичних занять по вищій математиці (числові, Функціональні ряди і їхні додатки). Краматорськ, 2004р.
5. Методичні вказівки до самостійній роботі з теми "Практичні додатки похідної функції однієї перемінної" дисципліни "Вища математика",- Краматорськ, 2006 р.
6. Паламарчук В.О., Степанов А.І. Вступ до математичного аналізу. Навчальний посібник Краматорськ: ДГМА, 2009, -56с
7. Власенко К.В., Степанов А.І. Вища математика. Математичний аналіз. Навчальний посьбник. Краматорськ: ДГМА, 2010, -88с
8. Власенко К.В., Ісікова Л.А., Чумак О.О. Вибрані глави вищої математики. Навчальний посібник до вивчення ІІІ модуля. Краматорськ: ДГМА, 2011, -64с
9. Власенко К.В.,Чумак О.О.,Дмитренко І.С Вища математика. Модуль 4. Визначений інтеграл. Застосування визначеного інтеграла: навчальний посібник для практичних занять і самостійної роботи - Краматорськ, ДДМА, 2012. – 52 с

10. Астахов В.М.Буланов Г.С.,Паламарчук В.О.,Грудкіна Н.С. Вища математика: методичні вказівки до додаткових занять з аудиторної та самостійної роботи для студентів усіх спеціальностей і усіх форм навчання. - Краматорськ, ДДМА, 2012. – 44 с.

Web-ресурси

1. Власенко К. В. Навчальний ресурс. – Режим доступа: http://vmdbi.net.ua/education_metod_complex/
2. Moodle. - Режим доступа: http://www.dgma.donetsk.ua/golovna.html
3. Higher School Mathematics Teacher http://formathematics.com/
4. Udemyhttps://www.udemy.com/
5. Courserahttps://www.coursera.org/
6. edX https://www.edx.org/
7. FutureLearn https://www.futurelearn.com/

Донбаська державна машинобудівна академія

Семестр **2** Навчальна дисципліна **«Математичний аналіз»** Спеціальність 014

М1. ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Білет № 1

Завдання 1. Обчислити границю $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2-4n+6}{5+6n-7n^2}$

Завдання 2. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x-x^2}$.

Завдання 3. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-16}{x+4}$

Завдання 4. Знайти точки розриву, встановити їх тип $y=\frac{4}{x^2+2x-3}$

Завдання 5. Знайти асимптоти $y=\frac{8(x-1)}{(x+1)^2}$

Завдання 6. Виконати дії над множинами X:{ x: -3≤ x ≤ 8}, Y: {x: -5≤ x ≤ 6}

Завідувач кафедри Астахов В.М.

Екзаменатор Ровенська О.Г.

Донбаська державна машинобудівна академія

Семестр **3** Навчальна дисципліна «**Математичний аналіз**» Спеціальність 014

М2. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Білет № 1

Завдання1. Знайти похідну функції $y = 3\sin 5x$.

Завдання 2. Обчислити границю, користуючись правилом Лопіталя $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2-16}{x+4}$.

Завдання 3. Знайти $y'\ x_0$, якщо $y = \frac{2x-4}{4-x}$, $x_0 = 0$.

Завдання 4. Знайти $\frac{dy}{dx}$ для функції $x = \sin t$; $y = \cos 2t$;

Завдання 5. Скласти рівняння дотичної до графіка функції $y = 2x^3 - x + 3$ в точці з абсцисою $x_0 = 0$.

Завдання 6. Знайти точки перегину графіка функції $y = x^3 - 3x^2$.

Завдання 7. Число 54 представлено у вигляді суми трьох додатних чисел. Перший доданок вдвічі більший другого. Знайти ці числа, якщо вони мають найбільший добуток.

Завідувач кафедри Астахов В.М.

Екзаменатор Ровенська О.Г.

Донбаська державна машинобудівна академія

Семестр **3** Навчальна дисципліна **«Математичний аналіз»** Спеціальність 014

М3. ПЕРВІСНА І НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

Білет № 1

Знайти інтеграли:

1. $\int \sin(2-3x)\mathrm{dx}$.
2. $\int \left(2x^5 - \frac{4}{x^3} + \frac{1}{x} + 3\sqrt{x}\right)\mathrm{dx}$.
3. $\int (x+8)\sin 5x\mathrm{dx}$.
4. $\int \frac{\mathrm{dx}}{4-x^2}$.
5. $\int x e^{x^2+3}\mathrm{dx}$.
6. $\int \frac{(3x-7)\mathrm{dx}}{x^3+4x^2+4x+16}$

Завідувач кафедри Астахов В.М.

Екзаменатор Ровенська О.Г.

Донбаська державна машинобудівна академія

Семестр **3** Навчальна дисципліна **«Математичний аналіз»** Спеціальність 014

М4. ІНТЕГРАЛ РІМАНА

Білет № 1

Завдання1. Обчислити інтеграл $\int_{1}^{2}(x-1)^2 \mathrm{dx}$.

Завдання 2. Обчислити інтеграл $\int_{1}^{2} \frac{\mathrm{dx}}{2x-1}$.

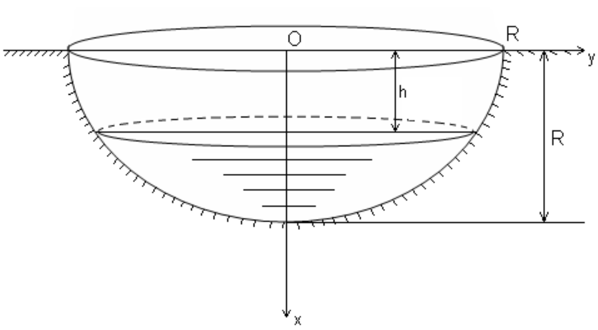
Завдання 3. Знайти середнє значення функції $y=-x^2+x-7$на інтервалі [1,3].

Завдання 4. Обчислити об'єм тіла утвореного обертанням навколо ОХ області $y=x^2+1$, $x=0, x=1$.

Завдання 5. Обчислити площу області $y=x,\ y=4x,\ x=0,\ x=2$.

Завдання 6. Точка рухається прямолінійно зі швидкістю $v(t)=2t+4$. Обчислити шлях за перші 3 с руху.

Завдання 7. Обчислити роботу, необхідну для відкачування рідини з напівсферичного резервуару. h- рівень рідини від поверхні.



Завідувач кафедри Астахов В.М.

Екзаменатор Ровенська О.Г.

Донбаська державна машинобудівна академія

Семестр **4** Навчальна дисципліна **«Математичний аналіз»** Спеціальність 014

М5. ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Білет № 1

Завдання 1. Побудувати область D**:** $y = x,\ \ y = 4x,\ \ x = 0,\ \ x = 2$

Завдання 2. Обчислити площу області D за допомогою подвійного інтегралу

Завдання 3. Побудувати просторову область V: $\begin{matrix} x^2 + y^2 = 4 \\ z = 4 - x - y \\ z = 0 \end{matrix}$

{{

Завдання 4. Знайти градієнт скалярного поля в заданій точці

$$u = (x^2 + y^2 + z^2), M_0(1,1,1)$$

Завдання 5. Обчислити роботу сили $\bar{F}$ вздовж лінії L_{MN}

$$\overrightarrow{F} = 2xy\bar{i} + x\bar{j}, \ L: y = x^2, M(-1,1),\ N(1,1)$$

Завдання 6. Обчислити потік векторного поля через замкнену поверхню, утворену координатними площинами та площиною $x + y + z = 1$

$$a(M) = (2x + 2y)\imath + (3y - z)\jmath + zk$$

Завдання 7. Обчислити координати центра ваги області, що обмежена лініями $x^2 + y^2 = 4,\ y = 0,\ y = x \quad (y \geq 0), \quad \rho = \rho_0\sqrt{(x^2 + y^2)^3}$ – поверхнева щільність пластини.

Завідувач кафедри Астахов В.М.

Екзаменатор Ровенська О.Г.

Донбаська державна машинобудівна академія

Семестр **4** Навчальна дисципліна **«Математичний аналіз»** Спеціальність 014

М6. РЯДИ. НЕВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ ТА СПЕЦІАЛЬНІ ФУНКЦІЇ

Білет № 1

Завдання 1. Перевірити збіжність і обчислити суму ряда

$$2-\frac{6}{11}+\frac{18}{121}-\frac{54}{1331}+\ldots$$

Завдання 2. Перевірити, чи виконується необхідна ознака збіжності

$$ {}_{n=1}^{\infty} \quad \frac{n^2-5n}{2+n^2+4n}$$

Завдання 3. Дослідити на збіжність ${}_{n=1}^{\infty} \quad \frac{2^n}{n!}$

Завдання 4. Дослідити на збіжність ${}_{n=1}^{\infty} \quad (\frac{n+3}{5n+1})^n$

Завдання 5. Обчислити суму ряда з заданою точністю ${}_{n=1}^{\infty} \quad \frac{(-1)^{n+1}}{7^n}, \delta = 0.001$

Завдання 6. Знайти формулу та побудувати графік $y = S_3(x)$частинної суми ряду

$$ {}_{n=1}^{\infty} (\frac{n^2+n-10}{2})\, x^{n-1}$$

Завдання 7. Знайти суму ряду $S \;\; x$ та її значення в точці $x_0 = -\frac{2}{3}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \; 2n^2+n-4 \;\; x^n$$

Завідувач кафедри Астахов В.М.

Екзаменатор Ровенська О.Г.

М1. ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Завдання 1. Виконати дії над множинами

A={2,5,7,9}   B={3,5,8,9,12}

Розв'язання

$A \cup B = \{2,3,5,7,8,9,12\}$

$A \cap B = \{5,9\}$

A\ B = {2,7}

Завдання 2. Виконати дії над множинами

X:{ x: -3≤ x ≤ 8},   Y: {x: -5≤ x ≤ 6}

Розв'язання

$X \cap Y : -3 \le x < 6$

$X \cup Y : -5 < x \le 8$

Завдання 3. Задано множини A={10} ; B={10,15} ; C={5,10,15}. З'ясувати входження множин.

Розв'язання

A $\in$ B, C $\ni$ A, C $\ni$ B.

Завдання 4. Довести рівність A $\cup$B= B$\cup$ A

Розв'язання

Нехай x $\in$A$\cup$ B, тоді x $\in$A або x$\in$B.

Звідси x$\in$B$\cup$ A, x$\in$B$\cup$ A

Завдання 5. Знайти границю

Розв'язання

$$\lim_{x\to 4}\frac{16-x^2}{x-4}=\{\frac{0}{0}\}=\lim_{x\to 4}\frac{(4-x)(4+x)}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{-(x-4)(x+4)}{x-4}=\lim_{x\to 4}(-x-4)=$$
$$=-4-4=-8$$

Завдання 6. Знайти границю

Розв'язання

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}3x}{6x}=\{\frac{0}{0}\}=[\mathrm{tg}3x \sim 3x, x\to 0]=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{6x}=\frac{1}{2}$$

Завдання 7. Знайти границю

Розв'язання

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2+2x+1}{x^2-2x-3}=\{\frac{0}{0}\}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)^2}{(x-3)(x+1)}=\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{x-3}=\frac{-1+1}{-1-3}=0$$

Завдання 8. Знайти границю

Розв'язання

$$\lim_{x\to\infty}(\frac{x+2}{x-4})^{5x}=\{1^\infty\}=\lim_{x\to\infty}(1+\frac{x+2}{x-4}-1)^{5x}=\lim_{x\to\infty}(1+\frac{x+2-(x-4)}{x-4})^{5x}=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{6}{x-4}\right)^{5x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6}{x-4}\cdot 5x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{30x}{x-4}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{30x}{x}}=e^{30}.$$

Завдання 9. Знайти границю

Розв'язання

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{3x}}{6x}=\{\frac{0}{0}\}=[1-e^{3x}\sim -3x, x\to 0]=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{6x}=\frac{1}{2}.$$

Завдання 10. Знайти границю

Розв'язання. :

$$\lim_{x\to -2}\frac{\sin(x+2)}{4x+8}=\{\frac{0}{0}\}=[\sin(x+2)\sim(x+2), x+2\to 0]=\lim_{x\to -2}\frac{x+2}{4(x+2)}=\frac{1}{4}.$$

Завдання 11. Знайти границю

Розв'язання

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+4x}-\sqrt{x^2-3x})=\{\infty-\infty\}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}(\frac{(\sqrt{x^2+4x}-\sqrt{x^2-3x})(\sqrt{x^2+4x}+\sqrt{x^2-3x})}{(\sqrt{x^2+4x}+\sqrt{x^2-3x})})=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+4x})^2-(\sqrt{x^2-3x})^2}{(\sqrt{x^2+4x}+\sqrt{x^2-3x})}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+4x-x^2+3x)}{\sqrt{x^2+4x}+\sqrt{x^2-3x}}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x}{\sqrt{x^2}+\sqrt{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{7x}{2x}=\frac{7}{2}.$$

Завдання 12. Знайти границю

Розв'язання

$$\lim_{x\to 1}(\frac{2x-1}{x^2})^{\frac{x}{x-1}}=\{1^{\infty}\}=\lim_{x\to 1}(1+\frac{2x-1}{x^2}-1)^{\frac{x}{x-1}}=\lim_{x\to 1}(1+\frac{2x-1-x^2}{x^2})^{\frac{x}{x-1}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 1}(\frac{2x-1-x^2}{x^2})\cdot(\frac{x}{x-1})}=e^{\lim\limits_{x\to 1}(\frac{-(x-1)^2\cdot x}{x^2\cdot(x-1)})}=e^{\lim\limits_{x\to 1}(\frac{-(x-1)}{x})}=e^{\frac{-(1-1)}{1}}=e^0=1.$$

Завдання 13. Знайти асимптоти графіка $y=\frac{2}{x^2-4}$

Розв'язання

Вертикальні асимптоти: $x^2-4=0$.Прямі $x=2$і$x=-2$

$$\lim_{x\to 2-0}\frac{2}{(x-2)(x+2)}=\frac{2}{(2-0-2)(2-0+2)}=\frac{2}{(-0)\cdot 4}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 2+0}\frac{2}{(x-2)(x+2)}=\frac{2}{(2+0-2)(2+0+2)}=\frac{2}{(+0)\cdot 4}=+\infty$$

$$\lim_{x\to -2-0}\frac{2}{(x-2)(x+2)}=\frac{2}{(-2-0-2)(-2-0+2)}=\frac{2}{(-4)\cdot(-0)}=+\infty\ \lim_{x\to -2+0}\frac{2}{(x-2)(x+2)}$$

$$=\frac{2}{(-2+0-2)(-2+0+2)}=\frac{2}{(-4)\cdot(+0)}=-\infty$$

Похилі асимптоти

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2}{(x^2-4)x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2}{x^3-4x}=[x^3-4x\sim x^3]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2}{x^3}=\frac{2}{\infty}=0.$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(\frac{2}{x^2-4}-0\cdot x)=\lim_{x\to\pm\infty}(\frac{2}{x^2-4})=[x^2-4\sim x^2]=\lim_{x\to\pm\infty}(\frac{2}{x^2})=\frac{2}{\infty}=0.$$

М2. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Завдання 1. Знайти похідну $y = 2x^3 - 5x^2 + 7\sqrt{x}$.

Розв'язання

$$+7 \cdot \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = 6x^2 - 10x + \frac{7}{2\sqrt{x}}.$$

Завдання 2. Знайти похідну $y = x^2 \ln x$.

Розв'язання

$$y' = \left(x^2\right)' \ln x + x^2 \left(\ln x\right)' = 2x \ln x + x^2 \frac{1}{x} = 2x \ln x + x.$$

Завдання 3. Знайти похідну $y = \dfrac{1+e^x}{1-e^x}$.

Розв'язання

$$y' = \frac{\left(1+e^x\right)'\left(1-e^x\right) - \left(1+e^x\right)\left(1-e^x\right)'}{\left(1-e^x\right)^2} = \frac{e^x\left(1-e^x\right) - \left(1+e^x\right)\left(-e^x\right)}{\left(1-e^x\right)^2} =$$

$$= \frac{e^x - e^{2x} + e^x + e^{2x}}{\left(1-e^x\right)^2} = \frac{2e^x}{\left(1-e^x\right)^2}.$$

Завдання 4. Знайти похідну $y = 2\cos 3x$.

Розв'язання

$$y' = \left(2\cos 3x\right)' = 2\left(-\sin 3x\right) \cdot \left(3x\right)' = 2\left(-\sin 3x\right) \cdot 3 = -6\sin 3x.$$

Завдання 5. Знайти похідну $y = \ln\left(6x-1\right)$.

Розв'язання

$$y' = \left(\ln\left(6x-1\right)\right)' = \frac{1}{6x-1} \cdot \left(6x-1\right)' = \frac{6}{6x-1}.$$

Завдання 6. Знайти похідну $y = \sin^8 \dfrac{x}{8}$.

Розв'язання

$$y' = \left(\sin^8 \frac{x}{8}\right)' = 8\sin^7 \frac{x}{8} \cdot \left(\sin \frac{x}{8}\right)' = 8\sin^7 \frac{x}{8} \cos\frac{x}{8} \cdot \left(\frac{x}{8}\right)' = 8\sin^7 \frac{x}{8} \cos\frac{x}{8} \cdot \frac{1}{8} =$$

$$= \sin^7 \frac{x}{8} \cos\frac{x}{8}.$$

Завдання 7. Знайти похідну $y = \sqrt{x} arctg \sqrt{x}$.

Розв'язання

$$y' = \left(\sqrt{x}\right)' arctg\sqrt{x} + \sqrt{x}\left(arctg\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} arctg\sqrt{x} + \sqrt{x} \cdot \frac{1}{1+\left(\sqrt{x}\right)^2} \cdot \left(\sqrt{x}\right)' =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} arctg\sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{1+x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} arctg\sqrt{x} + \frac{1}{2\left(1+x\right)}.$$

Завдання 8. Обчислити y' в точке x_0, якщо

$$y = \frac{1}{2}\ln\frac{4+x^2}{4-x^2}, \quad x_0 = 1.$$

Розв'язання

$$y' = \left(\frac{1}{2}\ln\frac{4+x^2}{4-x^2}\right)' = \frac{1}{2} \cdot \frac{4-x^2}{4+x^2} \cdot \left(\frac{4+x^2}{4-x^2}\right)' = \frac{1}{2} \cdot \frac{4-x^2}{4+x^2} \cdot$$

$$\cdot \frac{\left(4+x^2\right)'\left(4-x^2\right) - \left(4+x^2\right)\left(4-x^2\right)'}{\left(4-x^2\right)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4-x^2}{4+x^2} \cdot \frac{2x\left(4-x^2\right) - \left(4+x^2\right)\left(-2x\right)}{\left(4-x^2\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{4-x^2}{4+x^2} \cdot \frac{8x - 2x^3 + 8x + 2x^3}{\left(4-x^2\right)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4-x^2}{4+x^2} \cdot \frac{16x}{\left(4-x^2\right)^2} = \frac{8x}{16-x^4};$$

$$y'\left(x_0\right) = y'\left(1\right) = \frac{8 \cdot 1}{16-1^4} = \frac{8}{15}.$$

Завдання 9. Довести, що функція $y = f\left(x\right)$ задовільняє рівнянню:

$$y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \left(1-x^2\right)y' - xy = 1.$$

Розв'язання

$$y' = \frac{(\arcsin x)'\sqrt{1-x^2} - \arcsin x\left(\sqrt{1-x^2}\right)'}{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2} =$$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\sqrt{1-x^2} - \arcsin x\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{1+\arcsin x\cdot\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{1-x^2} + x\arcsin x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}.$$

Підставимо y и y' в рівняня:

$$(1-x^2)\cdot\frac{\sqrt{1-x^2}+x\arcsin x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} - x\cdot\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} = 1;$$

$$\frac{\sqrt{1-x^2}+x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} - x\cdot\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} = 1;$$

$$1+\frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} = 1;$$

1=1.

Завдання 10. Знайти похідну другого порядку для функції $y = -\frac{3}{x^2-5}$.

Розв'язання

$$y' = \left(-\frac{3}{x^2-5}\right)' = -3\left((x^2-5)^{-1}\right)' = -3\cdot(-1)(x^2-5)^{-2}(x^2-5)' = \frac{3}{(x^2-5)^2}\cdot 2x = = \frac{6x}{\left(x^2-5\right)^2}.$$

$$y'' = \left(\frac{6x}{(x^2-5)^2}\right)' = \frac{(6x)'\cdot(x^2-5)^2 - 6x\cdot\left((x^2-5)^2\right)'}{\left((x^2-5)^2\right)^2} =$$

$$= \frac{6(x^2-5)^2 - 6x\cdot 2(x^2-5)\cdot 2x}{(x^2-5)^4} = \frac{6(x^2-5) - 24x^2}{(x^2-5)^3} = -\frac{30+18x^2}{(x^2-5)^3}.$$

Завдання 11. Скласти рівняння дотичної до графіка $y = x^2+2$ в точке $x_0 = 1$.

Розв'язання

Якщо $x_0 = 1$, то $y_0 = y(1) = 1^2+2 = 3$, а $f'(x) = 2x$ і $f'(x_0) = f'(1) = 2$.

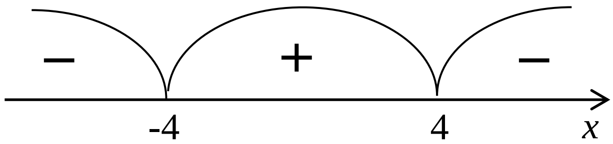
Рівняння дотичної

$$y-3=2(x-1) \quad \text{или} \quad 2x-y+1=0,$$

Завдання 12. Знайти інтервали монотонності та екстремуми $y=10+16x-\frac{1}{3}x^3.$

Розв'язання

Знайдемо похідну $y'=16-x^2$ та критичні точки $16-x^2=0$, $x_1=-4$ і $x_2=4$. Досліджуємо знаки першої похідної, $f(x)$ спадає при $x\in(-\infty,-4)\cup(4,+\infty)$ і зростає при $x\in(-4,4)$.



В точці $x_1=-4$ функція досягає мінімума, а в точці $x_2=4$ –максимума,

$$y_{\min}=y(-4)=10+16\cdot(-4)-\frac{(-4)^3}{3}=-\frac{98}{3};$$

$$y_{\max}=y(4)=10+16\cdot4-\frac{4^3}{3}=\frac{158}{3}.$$

Завдання 13. Знайти інтервали опуклості та точки перегину $y=x^3-6x^2+x$.

Розв'язання

Похідна: $y'=3x^2-12x+1$, друга похідна:, $y''=0$, якщо $x=2$. Досліджуємо знаки другої похідної

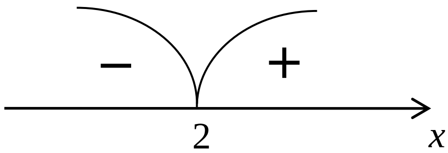


График функции опуклим догори при $x\in(-\infty,2)$ і опуклим донизу при $x\in(2,+\infty)$, $x=2$ – точка перегину.

Завдання 14. Статистичним шляхом встановлено, що об'єм продукції цеху $u(t)$ ум. од. протягом робочого дня задається функцією

$$u(t)=\frac{-20}{3}t^3+60t^2+160t+240, \qquad 1\le t\le 8,$$

де t – час, ч.

Знайти:

а) продуктивність праці, швидкість і темп її зміни через 3 години після початку роботи;

б) у який момент часу продуктивність праці буде найбільшою. Результат пояснити аналітично і графічно. Зробити економічний аналіз результатів.

Розв'язання

а) продуктивність праці $z(t)$ розраховується за формулою $z(t) = u'(t)$:

$$z(t) = \left(\frac{-20}{3} t^3 + 60t^2 + 160t + 240 \right)' = -20t^2 + 120t + 160.$$

Знаходимо продуктивність праці через 3 години після початку роботи:

$$z(3) = -20 \cdot 3^2 + 120 \cdot 3 + 160 = 340.$$

Швидкість зміни продуктивності знайдемо як першу похідну від $z(t)$:

$$z'(t) = \left(-20t^2 + 120t + 160 \right)' = -40t + 120.$$

Знаходимо швидкість зміни продуктивності через 3 години після початку роботи:

$$z'(3) = -40 \cdot 3 + 120 = 0.$$

Далі обчислюємо темп зміни продуктивності:

$$\frac{z'(t)}{z(t)} = \frac{-40t + 120}{-20t^2 + 120t + 140},$$

і знаходимо його значення через 3 години після початку роботи:

$$\frac{z'(3)}{z(3)} = \frac{-40 \cdot 3 + 120}{-20 \cdot 3^2 + 120 \cdot 3 + 160} = \frac{0}{340} = 0.$$

б) Графік функції продуктивності праці $z(t) = -20t^2 + 120t + 160$ являє собою параболу, гілки якої спрямовані вниз. Отже, найбільшого значення ця функція буде досягати у вершині параболи. Для побудови графіка функції знайдемо координати вершини параболи:

$$t_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-120}{2 \cdot (-20)} = 3, \qquad z(t_0) = z(3) = -20 \cdot 3^2 + 120 \cdot 3 + 160 = 340.$$

Вершина параболи знаходиться в точці $M(3;340)$. Так як гілки параболи спрямовані вниз, то знайдемо точки перетину з віссю Ot. Для цього прирівнюємо $z(t)$ до нуля:

$$-20t^2 + 120t + 160 = 0,$$

$$-t^2 + 6t + 8 = 0,$$

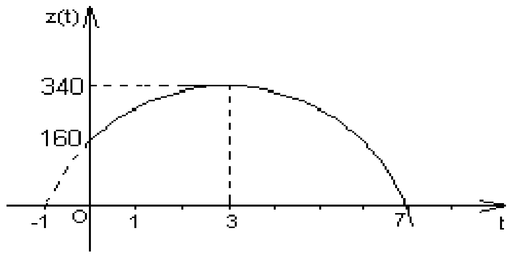
$$D = 36 - 4 \cdot (-1) \cdot 8 = 68, \qquad t_1 = \frac{-6 - \sqrt{68}}{-2} \approx 7.1 \; t_2 = \frac{-6 + \sqrt{68}}{-2} \approx -1.1.$$

Для знаходження перетину з віссю підставимо $t = 0$ у $z(t)$:

$$z(0) = -20 \cdot 0 + 120 \cdot 0 + 160 = 160.$$

Побудуємо графік функції (рис. 14):

За графіком видно, що продуктивність праці зростає в перші 3 години роботи, а потім поступово знижується до кінця робочого дня.



М3. ПЕРВІСНА І НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

Завдання 1. Знайти невизначені інтеграли

а) $\int (\sin x + 2 + \sqrt{x})\mathrm{dx}$.

Розв'язання

$$\int (\sin x + 2 + \sqrt{x})\mathrm{dx} = \int (\sin x + 2 + x^{1/2})\mathrm{dx} = -\cos x + 2x + \frac{x^{3/2}}{3/2} + C;$$

б) $\int (\frac{7}{x} + \frac{6}{x^3} + 5x)\mathrm{dx}$.

Розв'язання

$$\int (\frac{7}{x} + \frac{6}{x^3} + 5x)\mathrm{dx} = \int (\frac{7}{x} + 6x^{-3} + 5x)\mathrm{dx} = 7\ln|x| + 6\frac{x^{-2}}{-2} + 5\frac{x^2}{2} + C.$$

Завдання 2. Знайти невизначені інтеграли

а) $\int \cos(2x + 7)\mathrm{dx}$.

Розв'язання

$$\int \cos(2x + 7)\mathrm{dx} = \frac{1}{2}\sin(2x + 7) + C.$$

б) $\int e^{3-5x}\mathrm{dx}$.

Розв'язання

$$\int e^{3-5x}\mathrm{dx} = \int e^{-5x+3}\mathrm{dx} = \frac{1}{-5}e^{-5x+3} + C.$$

в) $\int \cos 3x\mathrm{dx}$.

Розв'язання

$$\int \cos 3x dx = \frac{1}{3}\sin 3x + C.$$

г) $\int \frac{7dx}{5+4x}$.

Розв'язання

$$\int \frac{7dx}{5+4x} = 7\int \frac{dx}{4x+5} = 7 \cdot \frac{1}{4}\ln|4x+5| + C = \frac{7}{4}\ln|4x+5| + C.$$

д) $\int (11x+6)^4 dx$.

Розв'язання

$$\int (11x+6)^4 dx = \frac{1}{11}\frac{(11x+6)^5}{5} + C.$$

е) $\int \frac{4dx}{(3x+6)^7}$.

Розв'язання

$$\int \frac{4dx}{(3x+6)^7} = 4\int (3x+6)^{-7} dx = 4\frac{1}{3}\frac{(3x+6)^{-6}}{-6} + C.$$

ж) $\int \sqrt[3]{(2x+1)^4} dx$.

Розв'язання

$$\int \sqrt[3]{(2x+1)^4} dx = \int (2x+1)^{4/3} dx = \frac{1}{2}\frac{(2x+1)^{7/3}}{7/3} + C.$$

Завдання 3. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int \frac{\ln x}{x} dx$.

Розв'язання

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \int \ln x \cdot \frac{1}{x} dx = \left| \begin{matrix} t = \ln x, \\ dt = (\ln x)' dx, \\ dt = \frac{1}{x} dx \end{matrix} \right| = \int t \cdot dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{\ln^2 x}{2} + C.$$

б) $\int \frac{\ln^3 x}{x} dx$.

Розв'язання

$$\int \frac{\ln^3 x}{x} dx = \int \ln^3 x \cdot \frac{1}{x} dx = \left| \begin{matrix} t = \ln x \\ dt = \frac{1}{x} dx \end{matrix} \right| = \int t^3 \cdot dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{\ln^4 x}{4} + C.$$

в) $\int \sqrt[5]{\sin x} \cdot \cos x dx$.

Розв'язання

$$\int \sqrt[5]{\sin x} \cdot \cos x dx = \left| \begin{matrix} t = \sin x \\ dt = (\sin x)' dx \\ dt = \cos x dx \end{matrix} \right| = \int \sqrt[5]{t} \cdot dt = \frac{t^{6/5}}{6/5} + C = \frac{5}{6}\sin^{6/5} x + C.$$

г) $\int \sqrt[5]{\sin 3x} \cdot \cos 3x dx$.

Розв'язання

$$\int \sqrt[5]{\sin 3x} \cdot \cos 3x dx = \left| \begin{matrix} t = \sin 3x \\ dt = 3\cos 3x dx | : 3 \\ \frac{1}{3} dt = \cos 3x dx \end{matrix} \right| = \int \sqrt[5]{t} \cdot \frac{1}{3} dt = \frac{1}{3} \cdot \frac{t^{6/5}}{6/5} + C =$$

$$= \frac{5}{18}\sin^{6/5} x + C.$$

Завдання 4. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int (2x+3)\cos 4x dx$.

Розв'язання

$$\int (2x+3)\cos 4x dx = \left| \begin{matrix} u = 2x+3 & du = 2dx \\ dv = \cos 4x dx & v = \frac{1}{4}\sin 4x \end{matrix} \right| = (2x+3) \cdot \frac{1}{4}\sin 4x - \int \frac{1}{4}\sin 4x \cdot 2dx == (2x+3) \cdot \frac{1}{4}\sin 4x - \frac{1}{4} \cdot 2\int \sin 4x dx = \frac{1}{4}(2x+3)\sin 4x - \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{4}\cos 4x\right) + C.$$

б) $\int x e^{7-2x} dx$.

Розв'язання

$$\int x e^{7-2x} dx = \left| \begin{matrix} u = x & du = (x)' dx = dx \\ dv = e^{7-2x} dx & v = \int e^{7-2x} dx = -\frac{1}{2} e^{7-2x} \end{matrix} \right| = x \cdot \left(-\frac{1}{2} e^{7-2x}\right) -$$

$$-\int \left(-\frac{1}{2} e^{7-2x}\right) \cdot dx = -\frac{1}{2} x e^{7-2x} + \frac{1}{2}\int e^{7-2x} dx = -\frac{1}{2} x e^{7-2x} + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) e^{7-2x} + C;$$

в) $\int x \operatorname{arctg} \frac{1}{x^2} dx$.

Розв'язання

$$\int x \operatorname{arctg} \frac{1}{x^2} dx == \left| \begin{matrix} u = \operatorname{arctg} \frac{1}{x^2} & du = \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{x^2}\right)' dx = \frac{dx}{1+\left(\frac{1}{x^2}\right)^2}\left(\frac{1}{x^2}\right)' = \frac{-2dx}{x\sqrt{x^4+1}} \\ dv = x dx & v = \int x dx = \frac{x^2}{2} \end{matrix} \right|$$

$$= = \operatorname{arctg} \frac{1}{x^2} \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{-2dx}{x\sqrt{x^4+1}} = \operatorname{arctg} \frac{1}{x^2} \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{2}{2}\int \frac{x dx}{\sqrt{x^4+1}} =$$

$$= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} \frac{1}{x^2} + \int \frac{x dx}{\sqrt{x^4+1}}.$$

$$\int \frac{\mathrm{xdx}}{\sqrt{x^4+1}} = \left| \begin{array}{c} t = x^2 \\ \mathrm{dt} = (x^2)'\mathrm{dx} = 2\mathrm{xdx} |:2 \\ \frac{1}{2}\mathrm{dt} = \mathrm{xdx} \end{array} \right| = \int \frac{\frac{1}{2}\mathrm{dt}}{\sqrt{t^2+1}} = \frac{1}{2}\ln\left|t + \sqrt{t^2+1}\right| + C =$$

$$= \tfrac{1}{2}\ln\left|x^2 + \sqrt{x^4+1}\right| + C.$$

$$\tfrac{x^2}{2}\mathrm{arctg}\tfrac{1}{x^2} + \tfrac{1}{2}\ln\left|x^2 + \sqrt{x^4+1}\right| + C.$$

г) $\int \sqrt{x}\,\mathrm{lnxdx}$.

Розв'язання

$$\int \sqrt{x}\,\mathrm{lnxdx} = \left| \begin{array}{ll} u = \ln x & \mathrm{du} = (\ln x)'\mathrm{dx} = \frac{1}{x}\mathrm{dx} \\ \mathrm{dv} = \sqrt{x}\mathrm{dx} & v = \int x^{1/2}\mathrm{dx} = \frac{2}{3}x^{3/2} \end{array} \right| = \ln x \cdot \frac{2}{3}x^{3/2} -$$

$$-\int \tfrac{2}{3}x^{3/2} \cdot \tfrac{1}{x}\mathrm{dx} = \tfrac{2}{3}x^{3/2}\ln x - \tfrac{2}{3}\int x^{1/2}\mathrm{dx} = \tfrac{2}{3}x^{3/2}\ln x - \tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{2}{3}x^{3/2} + C.$$

Завдання 5. Знайти невизначені інтеграли

а) $\int \frac{\mathrm{dx}}{x^2-6x+25}$.

Розв'язання

$$\int \frac{\mathrm{dx}}{x^2-6x+25} = \int \frac{\mathrm{dx}}{x^2 - 2\cdot 3x + 25} = \int \frac{\mathrm{dx}}{(x^2 - 2\cdot 3x + 3^2) - 3^2 + 25} = \int \frac{\mathrm{dx}}{(x-3)^2+16}$$

$$\int \tfrac{\mathrm{dx}}{(x-3)^2+16} = \tfrac{1}{4}\mathrm{arctg}\tfrac{x-3}{4} + C.$$

б) $\int \frac{(3x-5)\mathrm{dx}}{x^2-8x+25}$.

Розв'язання

$$\int \frac{(3x-5)\mathrm{dx}}{x^2-8x+25} = \int \frac{(3x-5)\mathrm{dx}}{x^2 - 2\cdot 4x + 25} = \int \frac{(3x-5)\mathrm{dx}}{(x^2 - 2\cdot 4x + 4^2) - 4^2 + 25} =$$

$$= \int \tfrac{(3x-5)\mathrm{dx}}{(x-4)^2+9}.$$

Заміна: $t = x - 4$, тоді $x = t + 4$, а $dx = (t+4)'dt = dt$.

$$\int \frac{(3x-5)\mathrm{dx}}{(x-4)^2+9} = \int \frac{(3\cdot(t+4)-5)\mathrm{dt}}{t^2+9} = \int \frac{(3t+12-5)\mathrm{dt}}{t^2+9} = \int \frac{(3t+7)\mathrm{dt}}{t^2+9} = \int \frac{3\mathrm{tdt}}{t^2+9} + +\int \frac{7\mathrm{dt}}{t^2+9}$$

$$= 3\int \frac{\mathrm{tdt}}{t^2+9} + 7\int \frac{\mathrm{dt}}{t^2+9} = 3\int \frac{\mathrm{tdt}}{t^2+9} + 7\cdot\frac{1}{3}\mathrm{arctg}\frac{t}{3} + C =$$

$$= 3\int \tfrac{\mathrm{tdt}}{t^2+9} + \tfrac{7}{3}\mathrm{arctg}\tfrac{x-4}{3} + C.$$

$$\int \frac{\mathrm{tdt}}{t^2+9} = \left|\begin{array}{c} z = t^2 \\ \mathrm{dz} = (t^2)'\mathrm{dt} = 2\mathrm{tdt}|:2 \\ \frac{1}{2}\mathrm{dz} = \mathrm{tdt} \end{array}\right| = \int \frac{\frac{1}{2}\mathrm{dz}}{z+9} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{dz}}{z+9} = \frac{1}{2}\ln|z+9| + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|t^2+9| + C.$$

Значить, вихідний інтеграл дорівнює

$$3 \cdot \frac{1}{2}\ln|t^2+9| + \frac{7}{3}\mathrm{arctg}\frac{x-4}{3} + C = \frac{3}{2}\ln|(x-4)^2+9| + \frac{7}{3}\mathrm{arctg}\frac{x-4}{3} + C.$$

Завдання 6. Знайти невизначений інтеграл $\int \sin^3 4x\mathrm{dx}$.

Розв'язання

$$\int \sin^3 4x\mathrm{dx} = \int \sin^2 4x \cdot \sin 4x\mathrm{dx} = \int (1-\cos^2 4x)\sin 4x\mathrm{dx} =$$

$$= \left|\begin{array}{c} t = \cos 4x \\ \mathrm{dt} = -4\sin 4x\mathrm{dx}|:-4 \\ -\frac{1}{4}\mathrm{dt} = \sin 4x\mathrm{dx} \end{array}\right| = \int (1-t^2)(-\frac{1}{4}\mathrm{dt}) = -\frac{1}{4}(t - \frac{t^3}{3}) + C =$$

$$= -\frac{1}{4}(\cos 4x - \frac{\cos^3 4x}{3}) + C.$$

Завдання 7. Знайти невизначені інтеграл $\int \sin 5x\cos 2x\mathrm{dx}$.

Розв'язання

$$\int \sin 5x\cos 2x\mathrm{dx} = \frac{1}{2}\int (\sin(5x-2x) + \sin(5x+2x))\mathrm{dx} =$$

$$= \frac{1}{2}\int (\sin 3x + \sin 7x)\mathrm{dx} = \frac{1}{2}(-\frac{1}{3}\cos 3x - \frac{1}{7}\cos 7x) + C.$$

Завдання 8. Знайти невизначені інтеграл $\int \frac{-\sqrt[6]{x-2}+4\cdot\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}+2\cdot\sqrt[3]{x-2}}\mathrm{dx}$

Розв'язання

Нехай

$$x - 2 = t^6.$$

Тоді

$$x = t^6 + 2, \qquad \mathrm{dx} = (t^6+2)'\mathrm{dt} = 6t^5\mathrm{dt}.$$

Виконуємо заміну:

$$\int \frac{-\sqrt[6]{x-2}+4\cdot\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}+2\cdot\sqrt[3]{x-2}}\mathrm{dx} = \int \frac{-\sqrt[6]{t^6}+4\cdot\sqrt{t^6}}{\sqrt{t^6}+2\cdot\sqrt[3]{t^6}} \cdot 6t^5\mathrm{dt} =$$

$$= 6\int \frac{-t+4t^3}{t^3+2t^2}t^5\mathrm{dt} = 6\int \frac{(-t+4t^3)t^5}{(t+2)t^2}\mathrm{dt} = 6\int \frac{(-t+4t^3)t^3}{t+2}\mathrm{dt} =$$

$$= 6\int \frac{-t^4+4t^6}{t+2}\mathrm{dt} = 6\int \frac{4t^6-t^4}{t+2}\mathrm{dt}.$$

Виділимо цілу частину:

$$\frac{4t^6-t^4}{t+2} = 4t^5 - 8t^4 + 15t^3 - 30t^2 + 60t - 120 + \frac{240}{t+2}.$$

Отже,

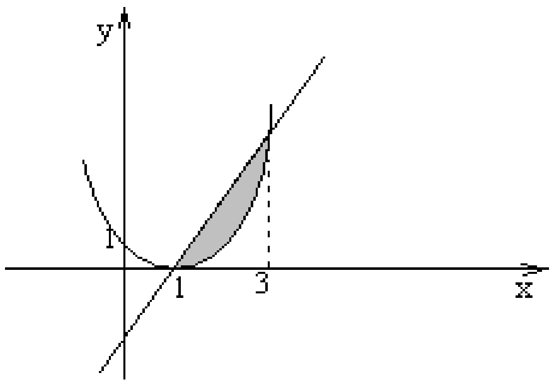
$$6\int \frac{4t^6 - t^4}{t+2}\mathrm{dt} = 6\int \left(4t^5 - 8t^4 + 15t^3 - 30t^2 + 60t - 120 + \frac{240}{t+2}\right)\mathrm{dt} =$$
$$= 6\left(4\frac{t^6}{6} - 8\frac{t^5}{5} + 15\frac{t^4}{4} - 30\frac{t^3}{3} + 60\frac{t^2}{2} - 120t + 240\ln|t+2|\right) + C =$$
$$= 6\left(4\frac{(\sqrt[6]{x-2})^6}{6} - 8\frac{(\sqrt[6]{x-2})^5}{5} + 15\frac{(\sqrt[6]{x-2})^4}{4} - 30\frac{(\sqrt[6]{x-2})^3}{3} + 60\frac{(\sqrt[6]{x-2})^2}{2} -\right.$$
$$\left. -120\sqrt[6]{x-2} + 240\ln|\sqrt[6]{x-2} + 2|\right) + C =$$
$$= 4(x-2) - \frac{48}{5}\sqrt[6]{(x-2)^5} + \frac{45}{2}\sqrt[3]{(x-2)^2} - 60\sqrt[2]{x-2} + 180\sqrt[3]{x-2} -$$
$$-720\sqrt[6]{x-2} + 1440\ln|\sqrt[6]{x-2} + 2|) + C.$$

М4. ІНТЕГРАЛ РІМАНА

Завдання 1. Обчислити площу області, обмеженої лініями $y = x^2 - 2x + 1$, $y = 2x - 2$.

Розв'язання

Графіком функції $y = x^2 - 2x + 1$ є парабола з вершиною в точці (1;0), гілки спрямовані вгору. Графік лінійної функції $y = 2x - 2$ – пряма. Зобразимо графіки на одному кресленні



Знайдемо точки перетину графіків

$$x^2 - 2x + 1 = 2x - 2,$$
$$x^2 - 4x + 3 = 0,$$
$$x_1 = 1, \quad x_2 = 3.$$

Використовуючи формулу п. 1, обчислимо площу області

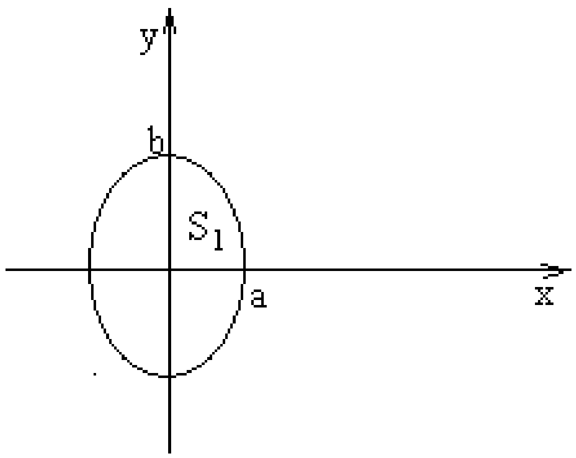
$$S = \int_1^3 \left[2x - 2 - \left(x^2 - 2x + 1\right)\right]dx = \int_1^3 \left(-x^2 + 4x - 3\right)dx =$$

$$= \left(-\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 3x \right)\Bigg|_1^3 = \frac{4}{3}.$$

Завдання 2. Знайти площу еліпса $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $t \in [0; 2\pi]$.

Розв’язання

Нехай площа еліпсу S, площа еліпсу в першій чверті S_1. Тоді $S = 4S_1$ так як область симетрична щодо координатних осей



Обчислимо площу, використовуючи формулу

$$S = 4S_1 = -4\int_0^{\pi/2} b\sin t \cdot (-a\sin t)\,dt = 4ab\int_0^{\pi/2} \sin^2 t\,dt = 2ab\int_0^{\pi/2} (1 - \cos 2t)\,dt =$$

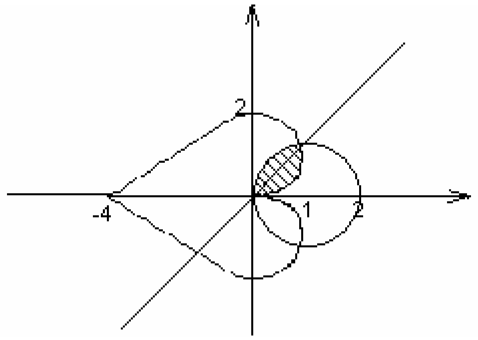
$$= 2ab\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t \right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi ab.$$

Завдання 3. Обчислити площу, обмежену лініями

$$\begin{cases} \rho = 2(1 - \cos\varphi) \\ \rho = 2\cos\varphi \end{cases}.$$

Розв’язання

Побудуємо графіки заданих функцій. $\rho = 2(1 - \cos\varphi)$ – кардіоїда, оскільки перед $\cos\varphi$ стоїть знак « – », направлена вліво; $\rho = 2\cos\varphi$ – коло з центром в точці (1;0) і радіусом 1



Шукана площа S складається з двох рівних частин. значить $S=2S_1$, де S_1 – заштрихованная площа. S_1 являє собою суму двох площ S_2 и S_3, кожну з яких знайдемо окремо. Знайдемо значення φ, яке відповідає точці перетину графіків функцій

$$2(1-\cos\varphi)=2\cos\varphi,$$

$$2\cos\varphi=1,\ \cos\varphi=\frac{1}{2},\ \varphi=\frac{\pi}{3}.$$

Площа S_2 обмежена графіком кардіоїди (φ змінюється від 0 до $\frac{\pi}{3}$)

$$S_2=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}4(1-\cos\varphi)^2d\varphi==2\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1-2\cos\varphi+\cos^2\varphi)d\varphi=$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1-2\cos\varphi+\frac{1+\cos2\varphi}{2})d\varphi==2\,(\varphi-2\sin\varphi+\frac{1}{2}\varphi+\frac{1}{4}\sin2\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=$$

$$=\pi-\frac{7\sqrt{3}}{4}.$$

Площа S_3 обмежена графіком кола (φ змінюється від $\frac{\pi}{3}$ до $\frac{\pi}{2}$)

$$S_3=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}4\cos^2\varphi d\varphi==\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos2\varphi)d\varphi=$$

$$=(\varphi+\frac{1}{2}\sin2\varphi)\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Значить $S=2(S_2+S_3)=$ $2\left(\pi-\frac{7\sqrt{3}}{4}+\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)=\frac{7\pi}{3}-4\sqrt{3}$.

Завдання 4. Обчислити площу, обмежену лініями

$$\begin{cases} x^2 - 4x + y^2 = 0 \\ x^2 - 8x + y^2 = 0 \end{cases},$$

$$y = \frac{x}{\sqrt{3}}, \quad y = \sqrt{3}x.$$

Розв'язання

Побудуємо графіки заданих функцій. Перейдемо до полярної системі координат за допомогою формул

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi. \end{cases}$$

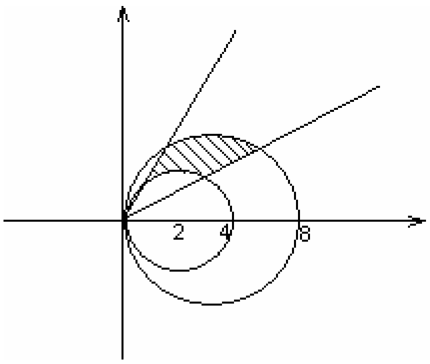
Маємо

$$x^2 - 4x + y^2 = 0 \Rightarrow \rho^2\cos^2\varphi - 4\rho\cos\varphi + \rho^2\sin^2\varphi = 0 \Rightarrow \rho = 4\cos\varphi,$$
$$x^2 - 8x + y^2 = 0 \Rightarrow \rho^2\cos^2\varphi - 8\rho\cos\varphi + \rho^2\sin^2\varphi = 0 \Rightarrow \rho = 8\cos\varphi,$$
$$y = \frac{x}{\sqrt{3}} \Rightarrow \rho\sin\varphi = \frac{\rho\cos\varphi}{\sqrt{3}} \Rightarrow tg\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{6},$$
$$y = \sqrt{3}x \Rightarrow \rho\sin\varphi = \sqrt{3}\rho\cos\varphi \Rightarrow tg\varphi = \sqrt{3} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}.$$

Умова завдання набуде вигляду

$$\begin{cases} \rho = 4\cos\varphi \\ \rho = 8\cos\varphi, \end{cases}$$

$$\frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{\pi}{3}.$$



Щоб знайти площу заштрихованої фігури скористаємося формулою.

$$S = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left(64\cos^2\varphi - 16\cos^2\varphi\right)d\varphi = = 12\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}(1+\cos 2\varphi)d\varphi =$$

$$=12(\varphi+\frac{1}{2}\sin 2\varphi)\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=2\pi$$
.

.

Завдання 5. Обчислити довжину дуги напівкубічної параболи $y^2=x^3$ від точки (0;0) до точки (4;8).

Розв'язання

З рівняння параболи $y=\pm\sqrt{x^3}$. Так як на ділянці графіка від точки (0; 0) до точки (4;8) $y>0$, то $y=\sqrt{x^3}=x^{3/2}$. Знайдемо похідну

$$y'=\frac{3}{2}x^{1/2}=\frac{3}{2}\sqrt{x}$$
.

Межі інтегрування 0 і 4, оскільки абсциса першої точки дорівнює 0, другої дорівнює 4. Використовуючи формулу п. 1, обчислимо довжину лінії

$$L=\int_0^4\sqrt{1+\left(\frac{3}{2}\sqrt{x}\right)^2}dx=\int_0^4\sqrt{1+\frac{9x}{4}}dx=\int_0^4\sqrt{\frac{4+9x}{4}}dx=\int_0^4\frac{\sqrt{4+9x}}{2}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^4(4+9x)^{1/2}dx=\frac{1}{27}(4+9x)^{3/2}\Bigg|_0^4=\frac{1}{27}\left(40^{3/2}-4^{3/2}\right)=\frac{1}{27}\left(40\sqrt{40}-8\right)$$
.

Завдання 6. Обчислити довжину дуги ланцюгової лінії $y=e^{x/2}+e^{-x/2}$, $x\in[0;2]$.

Розв'язання

Обчислимо похідну

$$y'=\frac{1}{2}e^{x/2}-\frac{1}{2}e^{-x/2}=\frac{1}{2}\left(e^{x/2}-e^{-x/2}\right)$$
.

Використовуючи формулу п. 1, обчислимо довжину лінії

$$L=\int_0^2\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\left(e^{x/2}-e^{-x/2}\right)\right)^2}dx=\int_0^2\sqrt{1+\frac{1}{4}\left(\left(e^{x/2}\right)^2-2\cdot e^{x/2}\cdot e^{-x/2}+\left(e^{-x/2}\right)^2\right)}dx=$$

$$=\int_0^2\sqrt{1+\frac{1}{4}\left(e^x-2\cdot 1+e^{-x}\right)}dx=\int_0^2\sqrt{\frac{4+e^x-2+e^{-x}}{4}}dx=\frac{1}{2}\int_0^2\sqrt{e^x+2+e^{-x}}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^2\sqrt{\left(e^{x/2}\right)^2+2\cdot e^{x/2}\cdot e^{-x/2}+\left(e^{-x/2}\right)^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^2\sqrt{\left(e^{x/2}+e^{-x/2}\right)^2}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^2\left(e^{x/2}+e^{-x/2}\right)dx=\frac{1}{2}\left(2\cdot e^{x/2}-2e^{-x/2}\right)\Bigg|_0^2=\left(e^{x/2}-e^{-x/2}\right)\Bigg|_0^2=$$

$$\left(e^{2/2}-e^{-2/2}\right)-\left(e^{0/2}-e^{0/2}\right)=e-e^{-1}=e-\frac{1}{e}.$$

Завдання 7. Обчислити довжину дуги кривої $y=\ln\cos x+2$, $0\le x\le \pi/6$.

Розв'язання

Обчислимо похідну

$$y'=(\ln\cos x+2)'=\frac{1}{\cos x}(-\sin x)=-tgx.$$

Знайдемо довжину лінії, використовуючи формулу.

$$\int_0^{\pi/6}\sqrt{1+tg^2x}dx=\int_0^{\pi/6}\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}}dx=\int_0^{\pi/6}\frac{dx}{|\cos x|}=\left|\begin{matrix}\cos x>0, & x\in[0;\pi/6]\\ |\cos x|=\cos x & \end{matrix}\right|=\int_0^{\pi/6}\frac{dx}{\cos x}=$$

$$=\ln\left|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|\Bigg|_0^{\pi/6}=\ln\left|tg\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{4}\right)\right|-\ln\left|tg\left(\frac{0}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|=$$

$$=\ln\left|tg\left(\frac{\pi}{3}\right)\right|-\ln\left|tg\frac{\pi}{4}\right|=\ln\sqrt{3}-\ln 1=\ln\sqrt{3}.$$

Завдання 9. Обчислити довжину одного витка циклоїди

$$\begin{cases}x=9(t-\sin t)\\ y=9(1-\cos t).\end{cases}$$

Розв'язання

Один виток циклоїди відповідає $t\in[0;2\pi]$. Обчислимо похідні

$$\begin{cases}x'_t=\left(9(t-\sin t)\right)'=9(1-\cos t)\\ y'_t=\left(9(1-\cos t)\right)'=9\sin t.\end{cases}$$

Знайдемо довжину лінії, використовуючи формулу

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{81(1-\cos t)^2+81\sin^2 t}dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{81\left(1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t\right)}dt=$$

$$=9\int_0^{2\pi}\sqrt{2-2\cos t}dt=9\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos t}dt=\left|\begin{matrix}\sin^2\frac{t}{2}=\frac{1-\cos t}{2},\\ 2\sin^2\frac{t}{2}=1-\cos t\end{matrix}\right|=$$

$$=9\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{2\sin^2\frac{t}{2}}dt=18\int_0^{2\pi}\left|\sin\frac{t}{2}\right|dt=\left|\begin{matrix}0\le t\le 2\pi, & 0\le\frac{t}{2}\le\pi, \\ \sin\frac{t}{2}>0, & \left|\sin\frac{t}{2}\right|=\sin\frac{t}{2}\end{matrix}\right|=18\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}dt=$$

$$18\cdot(-2)\cos\frac{t}{2}\Bigg|_0^{2\pi}=-36(\cos\pi-\cos 0)=-36(-2)=72.$$

Завдання 10. Обчислити довжину дуги кривої

$$\begin{cases}x=5\cos^2 t\\ y=5\sin^2 t, \ \ 0\le t\le \pi/2.\end{cases}$$

Розв'язання

Обчислимо похідні

$$\begin{cases}x'_t=5\cdot 2\cos t(-\sin t)=-5\sin 2t\\ y'_t=5\cdot 2\sin t\cos t=5\sin 2t.\end{cases}$$

Обчислимо довжину лінії

$$L=\int_0^{\pi/2}\sqrt{25\sin^2 2t+25\sin^2 2t}dt=5\sqrt{2}\int_0^{\pi/2}\sqrt{\sin^2 2t}dt=$$

$$=\left|\begin{matrix}\sin 2t>0, & 0\le t\le \pi/2, \\ |\sin 2t|=\sin 2t & \end{matrix}\right|=5\sqrt{2}\int_0^{\pi/2}\sin 2t dt=-5\sqrt{2}\frac{1}{2}\cos 2t\Bigg|_0^{\pi/2}=$$

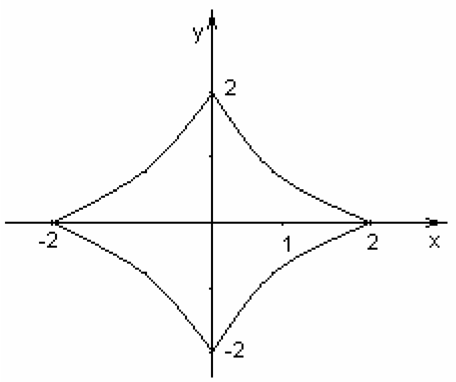
$$=\frac{5\sqrt{2}}{2}(\cos\pi-\cos 0)=\frac{-5\sqrt{2}}{2}(-2)=5\sqrt{2}.$$

Завдання 11. Обчислимо довжину дуги астроїди

$$\begin{cases}x=2\cos^3 t\\ y=2\sin^3 t.\end{cases}$$

Розв'язання

Так як графік лінії симетричний відносно Ox і Oy, то можна обчислити четверту частину довжини дуги, а потім помножити на 4. Параметр t при цьому буде змінюватися від 0 до $\pi/2$, т.к. відрізок $[0;\pi/2]$ відповідає чверті довжини періоду $[0;2\pi]$.



Обчислимо похідні $\begin{cases} x_t' = 2\cdot 3\cos^2 t\left(-\sin t\right) = -6\cos^2 t\sin t \\ y_t' = 2\cdot 3\sin^2 t\cos t = 6\sin^2 t\cos t. \end{cases}$

Використовуючи формулу п. 2, знайдемо довжину лінії L, $L = 4L_1$

$$L_1 = \int_0^{\pi/2} \sqrt{36\cos^4 t\sin^2 t + 36\sin^4 t\cos^2 t}dt = 6\int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos^2 t\sin^2 t\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right)}dt =$$

$$= 6\int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos^2 t\sin^2 t}dt = 6\int_0^{\pi/2} \cos t\sin t dt = 3\int_0^{\pi/2} \sin 2t dt = -\frac{3}{2}\cos 2t\Big|_0^{\pi/2} =$$

$$= -\frac{3}{2}\left(\cos\pi - \cos 0\right) = 3.$$

$$L = 4L_1 = 4\cdot 3 = 12.$$

Завдання 12. Обчислити довжину дуги кривої

$$\begin{cases} x = 3\left(2\cos t - \cos 2t\right) \\ y = 3\left(2\sin t - \sin 2t\right), \quad 0 \le t \le \pi. \end{cases}$$

Розв'язання

Обчислимо похідні

$$\begin{cases} x_t' = 3\left(-2\sin + 2\sin 2t\right) \\ y_t' = 3\left(2\cos t - 2\cos 2t\right). \end{cases}$$

$$L = \int_0^{\pi} \sqrt{9\left(-2\sin + 2\sin 2t\right)^2 + 9\left(2\cos t - 2\cos 2t\right)^2}dt =$$

$$= \int_0^{\pi} \sqrt{9\cdot 4\left(\sin^2 t - 2\sin t\sin 2t + \sin^2 2t\right) + 9\cdot 4\left(\cos^2 t - 2\cos t\cos 2t + \cos^2 2t\right)}dt =$$

$$= 6\int_0^{\pi} \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + \sin^2 2t + \cos^2 2t - 2\left(\sin t\sin 2t + \cos t\cos 2t\right)}dt =$$

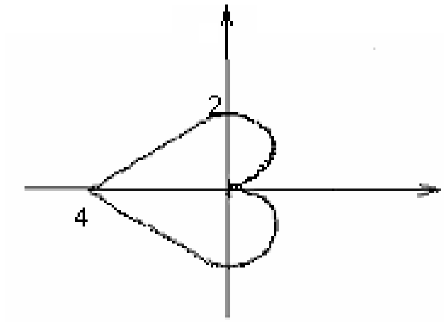
$$= 6\sqrt{2}\int_0^{\pi}\sqrt{2\sin^2\frac{t}{2}}dt = 6\sqrt{2}\int_0^{\pi}\sqrt{2}\left|\sin\frac{t}{2}\right|dt = \left|\begin{matrix}\sin\frac{t}{2} > 0, \quad 0 \le t \le \pi, \\ \left|\sin\frac{t}{2}\right| = \sin\frac{t}{2}\end{matrix}\right| = 12\int_0^{\pi}\sin\frac{t}{2}dt =$$

$$= -24\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{\pi} = -24\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right) = -24(0-1) = 24$$
.

Завдання 13. Обчислити довжину дуги кардіоїди $\rho = 2(1-\cos\varphi)$.

Розв'язання

Оскільки лінія симетрична, обчислимо довжину дуги $L = 2L_1$, де L_1 – довжина верхньої половини кривої, при цьому φ буде змінюватися від 0 до π.



Знайдемо похідну. Використовуючи формулу, обчислимо довжину лінії

$$L_1 = \int_0^{\pi}\sqrt{4(1-\cos\varphi)^2 + 4\sin^2\varphi}d\varphi = 2\int_0^{\pi}\sqrt{1-2\cos\varphi+\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}d\varphi =$$

$$= 2\int_0^{\pi}\sqrt{2-2\cos\varphi}d\varphi = 2\sqrt{2}\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos\varphi}d\varphi = 2\sqrt{2}\int_0^{\pi}\sqrt{2\sin^2\frac{\varphi}{2}}d\varphi =$$

$$= 4\int_0^{\pi}\left|\sin\frac{\varphi}{2}\right|d\varphi = 4\int_0^{\pi}\sin\frac{\varphi}{2}d\varphi == -8\cos\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi} = -8\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right) = -8(0-1) = 8$$
.

Завдання 14. Матеріальна точка рухається прямолінійно зі швидкістю $v(t) = 6t^2 + 4t + 1 \ ^{м}/_{c}$. Знайти шлях, пройдений точкою за проміжок часу $[0;3]$.

Роз'язання

Відповідно до формули п. 1, маємо

$$s = \int_0^3 (6t^2 + 4t + 1)dt = (2t^3 + 2t^2 + t)\Big|_0^3 = 56 \ м$$
.

Завдання 15. Швидкість прямолінійного руху точки $v(t) = te^{-\alpha t}$ $м/с$. Знайти шлях, пройдений точкою за перші β $с$ від початку руху.

Роз'язання

Шлях, пройдений точкою за β $с$, обчислимо за формулою

$$s = \int_0^\beta te^{-\alpha t}dt.$$

Інтегруємо «по частинах»:

$$s = \int_0^\beta te^{-\alpha t}dt = \begin{vmatrix} u = t & dv = e^{-\alpha t}dt \\ du = dt & v = -\dfrac{1}{\alpha}e^{-\alpha t} \end{vmatrix} = -\frac{t}{\alpha}e^{-\alpha t}\Bigg|_0^\beta -$$

$$-\int_0^\beta -\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha t}dt = -\frac{t}{\alpha}e^{-\alpha t}\Bigg|_0^\beta - \frac{1}{\alpha^2}e^{-\alpha t}\Bigg|_0^\beta = -\left(\frac{\beta}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2}\right)e^{-\alpha\beta} + \frac{1}{\alpha^2} \ м.$$

Завдання 16. Обчислити середню швидкість і шлях, пройдений точкою за час $t \in [0;6]$, якщо закон руху точки

$$\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t. \end{cases}$$

Роз'язання

Щоб обчислити шлях, пройдений точкою, скористаємося формулою. Враховуючи що

$$\begin{cases} x' = \left((t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t\right)' = t^2\cos t \\ y' = \left((2 - t^2)\cos t + 2t\sin t\right)' = t^2\sin t, \end{cases}$$

Знаходимо шлях, пройдений точкою за $t \in [0;6]$

$$s = \int_0^6 \sqrt{t^4\cos^2 t + t^4\sin^2 t}\,dt = \int_0^6 t^2 dt = \frac{t^3}{3}\Bigg|_0^6 = 72.$$

Обчислимо середню швидкість

$$v_{cp} = \frac{s}{t} = \frac{72}{6} = 12.$$

Завдання 17. Протягом робочого дня зміна продуктивності праці характеризується функцією $f(t) = -t^2 + 6t + 7$. Знайти:

а) Обсяг продукції, що випускається за час [0;4].

б) Середнє значення продуктивності за час [0;4] і моменти t_0 та t_1, в які досягаються середнє і максимальне значення продуктивності;

в) Результат пояснити графічно.

Розв'язання

а) Обсяг продукції, що випускається за час [0;T] обчислимо використовуючи формулу п.1.

$$U = \int_0^4 \left(-t^2 + 6t + 7\right)dt = \left(\frac{-t^3}{3} + \frac{6t^2}{2} + 7t\right)\Bigg|_0^4 = \frac{-4^3}{3} + \frac{6 \cdot 4^2}{2} + 7 \cdot 4 - 0 = \frac{164}{3}.$$

б) Середнє значення продуктивності $f(t)$ за час [0;T] обчислимо використовуючи формулу

$$F(c) = \frac{1}{4}\int_0^4 \left(-t^2 + 6t + 7\right)dt = \frac{1}{4} \cdot \frac{164}{3} = \frac{41}{3}.$$

Щоб знайти момент часу t_0 в який досягається середнє значення продуктивності, розв'яжемо рівняння:

$$-t^2 + 6t + 7 = \frac{41}{3} \;\Big|\cdot 3,$$

$$3t^2 - 18t + 20 = 0,$$

$$t_1 = \frac{18 - \sqrt{84}}{6} \approx 1.5 \qquad t_2 = \frac{18 + \sqrt{84}}{6} \approx 4.5 \notin [0;4].$$

Значить, $t_0 \approx 1.5$, причому $f(t_0) = \frac{41}{3}$.

Щоб знайти момент часу t_1 в який досягається максимальне значення продуктивності, знайдемо вершину параболи $f(t) = -t^2 + 6t + 7$ (максимальне значення буде досягатися саме в вершині, оскільки гілки параболи спрямовані вниз):

$$t_в = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{-2} = 3.$$

в) Для побудови параболи знайдемо другу координату вершини:

$$f(t_в) = f(3) = -(3)^2 + 6 \cdot 3 + 7 = 16.$$

Значить, вершина параболи знаходиться в точці $(3;16)$. Знайдемо точки перетину параболи з віссю Ot:

$$-t^2 + 6t + 7 = 0;$$
$$D = 64 \qquad t_1 = -1, \quad t_2 = 7.$$

Побудуємо графік функції продуктивності.

Аналізуючи графік, бачимо, площа заштрихованої фігури, яка виражає собою обсяг продукції, що випускається за 4 години, дорівнює площі прямокутника $OABC$, висотою якого є відрізок прямої, що дорівнює середньому значенню продуктивності праці за перші 4 години роботи.

Завдання 18. Знайти середнє значення витрат $K = 2x^2 + 12x + 7$, якщо обсяг продукції х змінюється від 1 до 3 одиниць. Вказати об'єм продукції, при якому витрати приймають середнє значення. Результат пояснити графічно.

Розв'язання

Середнє значення витрат $K(x)$, якщо обсяг продукції х змінюється від m до n одиниць, обчислимо, використовуючи формулу п. 2

$$l = \frac{1}{3-1}\int_1^3 (2x^2 + 12x + 7)dx = \frac{1}{2}\left(\frac{2x^3}{3} + \frac{12x^2}{2} + 7x\right)\Bigg|_1^3 =$$
$$\frac{1}{2}\left(\left(\frac{2 \cdot 27}{3} + \frac{12 \cdot 9}{2} + 7 \cdot 3\right) - \left(\frac{2}{3} + \frac{12}{2} + 7\right)\right) = \frac{134}{3}.$$

Щоб знайти обсяг продукції, при якому витрати приймають середнє значення, розв'яжемо рівняння:

$$2x^2 + 12x + 7 = \frac{134}{3},$$
$$6x^2 + 36x + 21 = 134, \qquad 6x^2 + 36x - 113 = 0,$$
$$x_1 = \frac{-36 - \sqrt{4008}}{12} \approx -8.3 \notin [1;3] \qquad x_2 = \frac{-36 + \sqrt{4008}}{12} \approx 2.3.$$

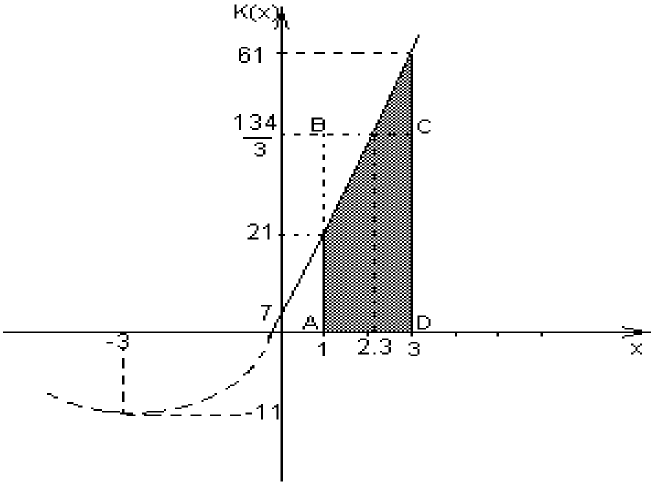
Пояснимо результат графічно. Графік функції $K = 2x^2 + 12x + 7$ являє собою параболу, гілки якої спрямовані вгору. Знайдемо вершину параболи:

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-12}{2 \cdot 2} = \frac{-12}{4} = -3,$$

$$K(x_0) = K(-3) = 2 \cdot (-3)^2 + 12 \cdot (-3) + 7 = -11.$$

Побудуємо параболу на відрізку від 1 до 3:

$$K(1) = 2 \cdot 1^2 + 12 \cdot 1 + 7 = 21, \qquad K(3) = 2 \cdot 3^2 + 12 \cdot 3 + 7 = 61.$$



На графіку видно, що площа прямокутника $ABCD$, стороною якого є відрізок $[1;3]$, а висотою - середнє значення функції на цьому відрізку, дорівнює площі заштрихованої області.

М5. ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Завдання 1. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, якщо $z = x^2 + 3xy - 2y + 4$.

Розв'язання

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(x^2 + 3xy - 2y + 4\right)'_x = \left(x^2\right)'_x + \left(3xy\right)'_x - \left(2y\right)'_x + \left(4\right)'_x = \left(x^2\right)'_x +$$

$$+3y\left(x\right)'_x - 2y\left(1\right)'_x + \left(4\right)'_x = 2x + 3y \cdot 1 - 2y \cdot 0 + 0 = 2x + 3y;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(x^2 + 3xy - 2y + 4\right)'_y = \left(x^2\right)'_y + \left(3xy\right)'_y - \left(2y\right)'_y + \left(4\right)'_y = x^2\left(1\right)'_y +$$

$$+3x\left(y\right)'_y - 2\left(y\right)'_y + \left(4\right)'_y = x^2 \cdot 0 + 3x \cdot 1 - 2 \cdot 1 + 0 = 3x - 2.$$

Завдання 2. Задано функцію $z = f(x, y)$. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0; \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

де $z = x^2 - xy + y^2 - 3x.$

Розв'язання

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \; x^2 - xy + y^2 - 3x \;'_x = \; x^2 \;'_x - \; xy \;'_x + \; y^2 \;'_x - \; 3x \;'_x = 2x - y - 3;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \; x^2 - xy + y^2 - 3x \;'_y = \; x^2 \;'_y - \; xy \;'_y + \; y^2 \;'_y - \; 3x \;'_y = -x + 2y.$$

Розв'яжемо систему

$$\begin{cases} 2x - y - 3 = 0; \\ -x + 2y = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y; \\ 2 \cdot 2y - y - 3 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y; \\ 3y = 3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2; \\ y = 1. \end{cases}$$

Завдання 4. Знайти градієнт скалярного поля

$$u = \frac{2x}{y^2} - 4y^3 + \frac{1}{6x^3}.$$

Розв'язання

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(\frac{2x}{y^2} - 4y^3 + \frac{1}{6x^3} \right)'_x = \frac{2}{y^2} \; x \;'_x - 4y^3 \; 1 \;'_x + \frac{1}{6} \; x^{-3} \;'_x = \frac{2}{y^2} \cdot 1 - 4y^3 \cdot 0 +$$

$$+ \frac{1}{6} \; -3x^{-4} \; = \frac{2}{y^2} - \frac{1}{2x^4};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \left(\frac{2x}{y^2} - 4y^3 + \frac{1}{6x^3} \right)'_y = 2x \; y^{-2} \;'_y - 4 \; y^3 \;'_x + \frac{1}{6x^3} \; 1 \;'_x = 2x \; -2y^{-1} \; -$$

$$-4 \cdot 3y^2 + + \frac{1}{6x^3} = -\frac{4x}{y^3} - 12y^2 .$$

Тоді

$$grad\, u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \left(\frac{2}{y^2} - \frac{1}{2x^4}; -\frac{4x}{y^3} - 12y^2 \right).$$

Завдання 6. Знайти частині похідні другого порядку

$$z = 3x^2 + 2xy^2 - 4xy + x^2 y - y^3.$$

Розв'язання

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \; 3x^2 + 2xy^2 - 4xy + x^2 y - y^3 \;'_x = 6x + 2y^2 - 4y + 2xy;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(3x^2+2xy^2-4xy+x^2y-y^3\right)'_y=4xy-4x+x^2-3y^2.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\left(6x+2y^2-4y+2xy\right)'_x=6+2y;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\left(6x+2y^2-4y+2xy\right)'_y=4y-4+2x;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left(4xy-4x+x^2-3y^2\right)'_y=4x-6y.$$

Завдання 7. Задано функцію $z=f(x,y)$. Показати, що $F\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)=0.$, якщо

$$z=\ln\left(e^x+e^y\right);\qquad F=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2.$$

Розв'язання

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(\ln\left(e^x+e^y\right)\right)'_x=\frac{1}{e^x+e^y}\cdot\left(e^x+e^y\right)'_x=\frac{e^x}{e^x+e^y};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(\ln\left(e^x+e^y\right)\right)'_y=\frac{1}{e^x+e^y}\cdot\left(e^x+e^y\right)'_y=\frac{e^y}{e^x+e^y};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\left(\frac{e^x}{e^x+e^y}\right)'_x=\frac{\left(e^x\right)'_x\cdot\left(e^x+e^y\right)-e^x\cdot\left(e^x+e^y\right)'_x}{\left(e^x+e^y\right)^2}=\frac{e^x\left(e^x+e^y\right)-e^x\cdot e^x}{\left(e^x+e^y\right)^2}=$$

$$=\frac{e^{2x}+e^{x+y}-e^{2x}}{\left(e^x+e^y\right)^2}=\frac{e^{x+y}}{\left(e^x+e^y\right)^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\left(\frac{e^x}{e^x+e^y}\right)'_y=e^x\left(\left(e^x+e^y\right)^{-1}\right)'_y=\frac{-e^x\cdot e^y}{\left(e^x+e^y\right)^2}=\frac{-e^{x+y}}{\left(e^x+e^y\right)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left(\frac{e^y}{e^x+e^y}\right)'_y=\frac{\left(e^y\right)'_y\cdot\left(e^x+e^y\right)-e^y\cdot\left(e^x+e^y\right)'_y}{\left(e^x+e^y\right)^2}=\frac{e^y\left(e^x+e^y\right)-e^y\cdot e^y}{\left(e^x+e^y\right)^2}=$$

$$=\frac{e^{x+y}+e^{2y}-e^{2y}}{\left(e^x+e^y\right)^2}=\frac{e^{x+y}}{\left(e^x+e^y\right)^2}.$$

Підставимо похідні другого порядку в функцію F :

$$F=\frac{e^{x+y}}{\left(e^x+e^y\right)^2}\cdot\frac{e^{x+y}}{\left(e^x+e^y\right)^2}-\left(\frac{-e^{x+y}}{\left(e^x+e^y\right)^2}\right)^2=\frac{e^{2x+2y}}{\left(e^x+e^y\right)^4}-\frac{e^{2x+2y}}{\left(e^x+e^y\right)^4}=0.$$

Завдання 8. Знайти центр ваги пластини, обмеженої лініями $y = x^2$, $y=8-x^2$.

Розв'язання

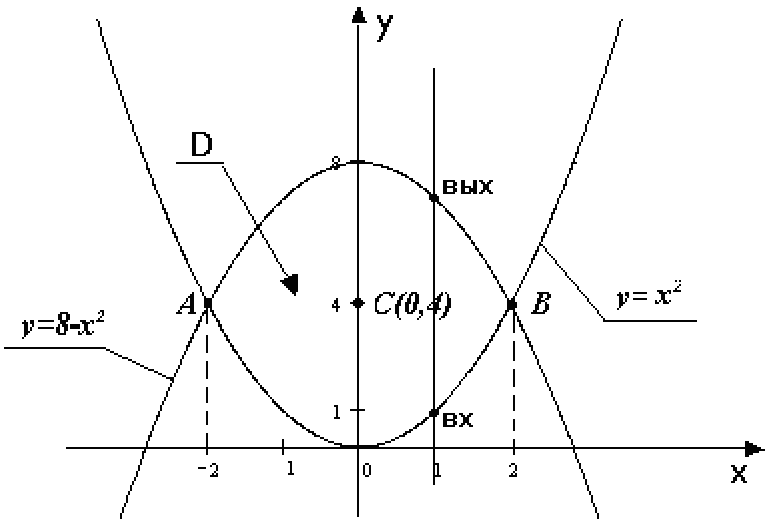
Використаємо формули

$$x_c=\frac{M_y}{M}\quad,\quad y_c=\frac{M_x}{M},$$

$M=\iint_D \gamma(x,y)\mathrm{dxdy}$

де - масса пластини D, $\gamma(x,y)$ – щільність.

Побудуємо область



$$x_c=\frac{\iint_D x\cdot\mathrm{dx}\cdot\mathrm{dy}}{\iint_D \mathrm{dx}\cdot\mathrm{dy}}\quad,\quad y_c=\frac{\iint_D y\cdot\mathrm{dx}\cdot\mathrm{dy}}{\iint_D \mathrm{dx}\cdot\mathrm{dy}};$$

Обчислимо

$$\iint_D \mathrm{dxdy}=\int_{-2}^{2}\mathrm{dx}\int_{x^2}^{8-x^2}\mathrm{dy}=\int_{-2}^{2}y\Big|_{x^2}^{8-x^2}\mathrm{dx}=$$

$$=\int_{-2}^{2}(8-x^2)\mathrm{dx}=(8x-\frac{2}{3}x^3)\Big|_{-2}^{2}=\frac{64}{3}$$

$$\iint_D y\mathrm{dxdy}=\int_{-2}^{2}\mathrm{dx}\int_{x^2}^{8-x^2}\mathrm{ydy}=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}y^2\Big|_{x^2}^{8-x^2}\mathrm{dx}=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}((8-x^2)^2-x^4)\mathrm{dx}=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}16(4-x^2)\mathrm{dx}==8(4x-\frac{x^3}{3})\Big|_{-2}^{2}=\frac{4\cdot 64}{3}.$$

Тоді

$$y_c=\frac{\frac{4\cdot 64}{3}}{\frac{64}{3}}=4;\qquad \mathrm{C}(0,4).$$

Завдання 9. Обчислити роботу сили Fвздовж лінії L від точки M до N.

$$F = 3xy\imath + y^2 \quad , \quad L\colon y = x^2 \quad , \quad M(-1{,}1) \quad , \quad N(1{,}1)$$

Розв'язання

Використаємо формулу

$$A = \int_{L_{\mathrm{MN}}} 3xy\mathrm{dx} + y^2\mathrm{dy} \quad , \quad L\colon y = x^2 \quad , \quad x \in [-1{,}1].$$

$$A = \int_{L_{\mathrm{MN}}} 3xy\mathrm{dx} + y^2\mathrm{dy} = \left\{\begin{matrix} y = x^2 \\ \mathrm{dy} = 2x\mathrm{dx} \end{matrix} \quad x \in [-1{,}1]\right\} =$$

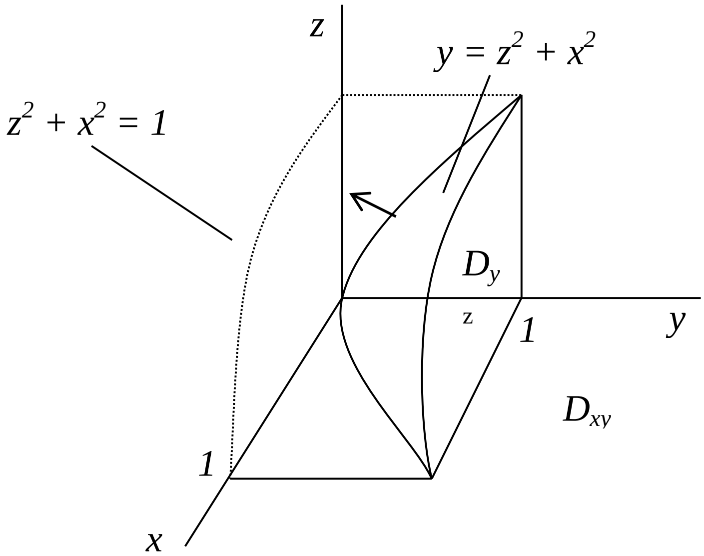
$$= \int_{-1}^{1} 3x \cdot x^2\mathrm{dx} + (x^2)^2 \cdot 2x\mathrm{dx} = \int_{-1}^{1} (3x^3 + 2x^5)\mathrm{dx} =$$

$$\frac{3}{4}x^4 + \frac{2}{6}x^6\Big|_{-1}^{1} = 0 \quad ; \quad A = 0.$$

Завдання 10. Знайти потік векторного поля $F = x^2 i + xj + xzk$ через зовнішній бік поверхні σ, розташованої в першому октанті і обмеженої поверхнями $y = z^2 + x^2$, $y = 1$, $x = 0$, $z = 0$.

Розв'язання

Побудуємо поверхню



За формулою

$$\Pi = \iint_{\sigma} Fn d\sigma = \iiint_{V} \mathrm{div}F\mathrm{dv}$$

знаходимо

$$\mathrm{div}F = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 2x + 0 + x = 3x$$

$$\Pi = \iiint_{V} 3x\mathrm{dxdydz} = 3\int_0^1 \mathrm{dy} \int_0^{\sqrt{y}} x\mathrm{dx} \int_0^{\sqrt{y-x^2}} \mathrm{dz} = 3\int_0^1 \mathrm{dy} \int_0^{\sqrt{y}} x\sqrt{y - x^2}\mathrm{dx} =$$

$$= \int_0^1 y^{3/2}dy = \frac{2}{5}.$$

М6. РЯДИ. НЕВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ І СПЕЦІАЛЬНІ ФУНКЦІЇ

Завдання 1. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^3+3}$

Розв'язання

Ряд знакододатній, загальний член ряду $U_n = \frac{n}{n^3+3}$. При $n \to \infty U_n = \frac{n}{n^3+3} \sim \frac{1}{n^2} \to 0$.

Застосуємо ознаку порівнянь в неграничній формі. Оскільки U_n эквивалентен загальному члену узагальненого гармонійного ряду ($\alpha = 2$), то ряд збігається.

Завдання 2. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\frac{n+1}{2n})^n$

Розв'язання

Розглянемо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}|(-1)^n(\frac{n+1}{2n})^n| = \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n+1}{2n})^n.$$

За радикальною ознакою Коші: $U_n = (\frac{n+1}{2n})^n$.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{U_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{(\frac{n+1}{2n})^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} < 1.$$

Отже, ряд збігається абсолютно.

Завдання 3. Знайти область збіжності ряду

$$1 + (x-2) + \frac{(x-2)^2}{2} + \frac{(x-2)^3}{3} + \ldots + \frac{(x-2)^n}{n} + \ldots$$

Розв'язання

Нехай *x* – фіксоване, за ознакою Д'Аламбера маємо:

$$\lim_{n\to\infty}|\frac{U_{n+1}}{U_n}| = \lim_{n\to\infty}|\frac{(x-2)^{n+1}n}{(n+1)(x-2)^n}| = |x-2|\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = |x-2|.$$

При $|x-2| < 1$ряд збігається, при $|x-2| > 1$ –розбігається. Розв'язуючи нерівність $|x-2| < 1$, отримаємо $1 < x < 3$, . $x \in (1,3)$ –інтервал збіжності ряду.

Дослідимо ряд на збіжність у кінцевих точках При *x* = *1* : $1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \ldots$,збігається за ознакою Лейбниця. При *x* = 3 ряд $1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$. це розбіжний ряд.

Завдання 4. Обчислити інтеграл $\int_0^1 \frac{dx}{8+x^3}$ з точністю $\delta = 10^{-2}$.

Розв'язання

Розвинемо під'інтегральну функцію в степеневий ряд

$$\frac{1}{8+x^3} = \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{1+(\frac{x}{2})^3} = \frac{1}{8}(1 - (\frac{x}{2})^3 + (\frac{x}{2})^6 - (\frac{x}{2})^9 + \ldots + (-1)^{n-1}(\frac{x}{2})^{3(n-1)} + \ldots)$$

Тоді

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{dx}}{8+x^3} = \frac{1}{8}\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{3(n-1)}}{2^{3(n-1)}}\mathrm{dx} = \frac{1}{8}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{3n-2}}{2^{3(n-1)}(3n-2)}\Big|_0^1 =$$

$$=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2^3\cdot 4}+\frac{1}{2^6\cdot 7}-\frac{1}{2^9\cdot 10}+\ldots\right)$$

Обчислимо суму ряду з точністю $\delta = 10^{-2}$.

Отриманий ряд є знакопочережним, обчислимо його доданки:

$$1{,}000-\frac{1}{32}+\frac{1}{64\cdot 7}-\frac{1}{64\cdot 8\cdot 10}+\ldots \approx 1{,}000-0{,}031 = 0{,}969 \approx 0{,}97.$$

Відкинута частина не перевищує $\frac{1}{448} < \delta$.

Отже, $\int_0^1 \frac{\mathrm{dx}}{8+x^3} \approx 0{,}12$.

Завдання 5. Знайти три перших, відмінних від нуля членів розв'язку диференціального рівняння

$$y' = xy^2 + 1, y(1) = 0$$

Розв'язання

Будемо знаходити розв'язок у вигляді ряду по степеням $(x-1)$:

$$y(x) = y(1) + \frac{y'(1)}{1!}(x-1) + \frac{y''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{y'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \ldots.$$

Враховуючи умову $y(1) = 0$, знаходимо $y'(1) = 1\cdot y^2(1) + 1 = 1$.

Продиференціюємо рівняння

$$y'' = y^2 + 2xyy', \qquad y''(1) = y^2(1) + 2\cdot 1\cdot y(1)\cdot y'(1) = 0;$$

$$y''' = 2y\cdot y' + 2yy' + 2xy^{\;\;2} + 2xyy''.$$

Знаходимо$y'''(1) = 2$.

$$y^{(4)} = 6(y')^2 + 6y\cdot y'' + 6xy'y'' + 2xyy'''$$

При $x = 1$, $y^{(4)}(1) = 6$.

Отже,

$$y(x) = (x-1) + \frac{2(x-1)^3}{3!} + \frac{6(x-1)^4}{4!} + \ldots = (x-1) + \frac{(x-1)^3}{3} + \frac{(x-1)^4}{4} + \ldots$$

Завдання 7. Розвинути функцію $f(x)$ в ряд Фур'є і побудувати графік суми ряду :

$$f(x) = \begin{cases} -1, -\pi < x < 0 \\ 1, 0 < x < \pi \end{cases}$$

Розв'язання

Обчислимо коефіцієнти Фур'є

$$a_0 = a_n = 0,$$

$\sin nx \mathrm{dx} = \frac{2}{\pi}(\frac{-\cos nx}{n})|$

0
π

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \quad = \frac{2}{\pi n}(1 - \cos n\pi) =$$

$$= \{ \begin{matrix} 0, n\text{-чётно} \\ \frac{4}{\pi n}, \text{n-нечётно} \end{matrix}$$

$$f(x) = \frac{4}{\pi}(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \ldots + \frac{1}{2n-1}\sin(2n-1)x + \ldots)$$

Побудуємо графік

$$S(x) = \frac{4}{\pi} \quad {}_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}.$$